Universitatea din Craiova

Facultatea de Matematica si Stiinte ale Naturii

Scoala Doctorala de Stiinte Exacte

Domeniul: Fizica

BÂRCAN Maria-Magdalena

“Sisteme de clasă II liniare in derivate”

–Rezumatul tezei de doctorat–

Conducator stiintific
Prof. Dr. BIZDADEA Constantin

Craiova
2014

1 Problema de baza abordata in teza

Fie $z^A\big|_{A=1,\ldots,2n}$ un set de variabile bosonice care descriu evolutia in timp a unui sistem dinamic. Presupunem ca sistemul considerat este descris de o actiune liniara in derivate

$$S_0\left[z^A\right]=\int_{t_1}^{t_2} dt\left(a_A\left(z\right)\dot{z}^A-V\left(z\right)\right)\equiv\int_{t_1}^{t_2} dtL_0\left(z,\dot{z}\right),\ A=1,\cdots,2n, \quad (1)$$

unde $a_A\left(z\right)$ semnifica 1-forma potential iar $V\left(z\right)$ reprezinta un potential in general arbitrar. In cele ce urmeaza vom considera cazul in care 2-forma simplectica

$$\omega_{AB}\left(z\right)=\frac{\partial a_B}{\partial z^A}-\frac{\partial a_A}{\partial z^B}=-\omega_{BA}\left(z\right). \quad (2)$$

este nedegenerata, ceea ce inseamna ca $\det\omega_{AB}\neq 0$ (local). Nedegenerarea 2-formei simplectice implica existenta unei structuri de paranteza, definita local prin relatia

$$\left[F_1,F_2\right]=\omega^{AB}\frac{\partial F_1}{\partial z^A}\frac{\partial F_2}{\partial z^B}, \quad (3)$$

in termenii careia ecuatiile de miscare Euler–Lagrange [1], $\frac{\delta L_0}{\delta z^A}\equiv\frac{\partial L_0}{\partial z^A}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial\dot{z}^A}\right)=0$, care rezulta din principiul variational bazat pe actiunea (1), pot fi exprimate sub forma

$$H^A\equiv\dot{z}^A-\left[z^A,V\right]=0, \quad (4)$$

unde ω^{AB} este inversa lui ω_{AB}. Fixarea constantelor de integrare in solutia generala a ecuatiilor (4) implica impunerea conditiilor initiale

$$z^A\left(t_0\right)=z_0^A,\ t_1\leq t_0\leq t_2. \quad (5)$$

Pe de o parte, este simplu de vazut ca Lagrangianul care apare in actiunea (1) este degenerat in sensul abordarii Dirac [2]–[4], dar analiza canonica a acestuia evidentiaza numai constrangeri de calsa II. Atunci, trecand la paranteza Dirac gasim ca dinamica in termenii variabilelor independente este descrisa de ecuatiile (4). In contextul sistemelor liniare in derivate, un punct de vedere alternativ referitor la sistemele supuse la constrangeri a fost formulat in referinta [5]. Pe de alta parte, ecuatiile (4) pot fi privite ca ecuatii Hamilton [6] pentru un sistem cu Hamiltonianul $H_0\left(z\right)\equiv V\left(z\right)$. Astfel, dand o formulare liniara a dinamicii, gasim intotdeauna ca ecuatiile Euler–Lagrange si Hamilton exprimate in termenii acelorasi variabile coincid. In fapt, avem ca $\frac{\delta L_0}{\delta z^A} = \omega_{AB} H^B$.

Problema de baza abordata in teza este urmatoarea: dand o formulare liniara a dinamicii in termenii unor variabile, exista o formulare Lagrangiana echivalenta, nedegenerata si patratica in derivate in termenii acelorasi variabile?

2 Rezultate obtinute

In continuare vom prezenta pe scurt rezultatele obtinute.

Un prim rezultat de baza este dat de Teoremele 1 si 2.

Teorema 1 *Pentru orice Lagrangian liniar in derivate $L_0(z,\dot{z}) = a_A(z)\dot{z}^A - V(z)$ cu 2-forma simplectica nedegenerata exista un Lagrangian patratic in derivate $\bar{L}_0(z,\dot{z}) = \frac{1}{2}k_{AB}\dot{z}^A\dot{z}^B - \bar{V}(z)$ astfel incat sa avem dubla implicatie*

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\delta L_0}{\delta z^A} = 0, \\ z^A(t_0) = z_0^A, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\delta \bar{L}_0}{\delta z^A} = 0, \\ z^A(t_0) = z_0^A,\ \dot{z}^A(t_0) = \left[z^A, V\right]\Big|_{z_0^A}, \end{array} \right. \tag{6}$$

daca si numai daca exista o matrice constanta, simetrica si inversabila k_{AB} care verifica relatiile

$$k_{AC}\frac{\partial\left[\left[z^C, V\right], V\right]}{\partial z^B} = k_{BC}\frac{\partial\left[\left[z^C, V\right], V\right]}{\partial z^A}. \tag{7}$$

Teorema 1 demonstreaza existenta unei formulari Lagrangiene a dinamicii unui sistem de clasa II liniar in derivate, care: a) este nedegenerata si patratica in derivate; b) este echivalenta, la nivelul solutiilor ecuatiilor de miscare supuse la conditii initiale mutual compatibile, cu formularea liniara in termenii acelorasi variabile.

In conditiile teoremei anterioare gasim imediat ca $\bar{V}(z)$ este solutie a ecuatiilor

$$-\frac{\partial \bar{V}}{\partial z^A} = k_{AC}\left[\left[z^C, V\right], V\right], \tag{8}$$

astfel incat

$$\frac{\delta \bar{L}_0}{\delta z^A} = -k_{AB}E^B \equiv -k_{AB}\left(\ddot{z}^B - \left[\left[z^B, V\right], V\right]\right). \tag{9}$$

In continuare, trecem la teorii de camp descrise de actiuni liniare in derivate de tipul

$$S_0\left[Q^A\right]=\int d^D x\left(\alpha_A(Q)\,\dot{Q}^A-\mathcal{V}\left(Q^A,\partial_i Q^A\right)\right)\equiv\int d^D x\mathcal{L}_0\left(Q^A,\partial_\mu Q^A\right). \tag{10}$$

In (10) am utilizat notatiile standard $\dot{f}=\partial_0 f=\partial f/\partial t$ si $\partial_i g=\partial g/\partial x^i$, precum si metrica Minkowski cu signatura preponderent negativa, $\sigma_{\mu\nu}=\sigma^{\mu\nu}=(+-\ldots-)$. Consideram din nou ca 2-forma simplectica

$$\Omega_{AB}(x)=\frac{\partial\alpha_B}{\partial Q^A}(x)-\frac{\partial\alpha_A}{\partial Q^B}(x)=-\Omega_{BA}(x), \tag{11}$$

este nedegenerata, ceea ce conduce la structura de paranteza

$$\left[F\left(x^0\right),G\left(x^0\right)\right]=\int d^{D-1}y\frac{\delta F}{\delta Q^A\left(x^0,\mathbf{y}\right)}\Omega^{AB}\left(x^0,\mathbf{y}\right)\frac{\delta G}{\delta Q^B\left(x^0,\mathbf{y}\right)}, \tag{12}$$

unde Ω^{AB} este inversa lui Ω_{AB}. Ecuatiile de camp care rezulta din principiul variational bazat pe actiunea (10) au forma

$$\mathcal{H}^A\equiv\dot{Q}^A(x)-\left[Q^A(x),V\left(x^0\right)\right]=0, \tag{13}$$

cu $V\left(x^0\right)=\int d^{D-1}x\mathcal{V}\left(Q^A,\partial_i Q^A\right)$. Relativ la ecuatiile (13) alegem conditiile initiale

$$Q^A\left(t_0,\mathbf{x}\right)=Q_0^A(\mathbf{x}). \tag{14}$$

Urmand o linie similara cu cea din cazul sistemelor cu numar finit de grade de libertate, ajungem urmatoarea teorema.

Teorema 2 *Pentru orice Lagrangian liniar in derivate* $\mathcal{L}_0\left(Q^A,\partial_\mu Q^A\right)=\alpha_A(Q)\,\dot{Q}^A-\mathcal{V}\left(Q^A,\partial_i Q^A\right)$ *cu 2-forma simplectica nedegenerata exista un Lagrangian patratic in derivate* $\bar{\mathcal{L}}_0\left(Q^A,\partial_\mu Q^A\right)=\frac{1}{2}\rho_{AB}\dot{Q}^A\dot{Q}^B-\bar{\mathcal{V}}\left(Q^A,\partial_i Q^A\right)$ *astfel incat sa avem dubla implicatie*

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta Q^A}=0,\\ Q^A\left(t_0,\mathbf{x}\right)=Q_0^A(\mathbf{x}),\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}_0}{\delta Q^A}=0,\\ Q^A\left(t_0,\mathbf{x}\right)=Q_0^A(\mathbf{x}),\\ \dot{Q}^A\left(t_0,\mathbf{x}\right)=\left.\left[Q^A(x),V\left(x^0\right)\right]\right|_{Q_0^A(\mathbf{x})},\end{array}\right. \tag{15}$$

daca si numai daca exista o matrice constanta, simetrica si inversabila ρ_{AB} *care satisface relatiile*

$$\rho_{AC}\frac{\delta\left[\left[Q^C,V\right],V\right]}{\delta Q^B}(x)=\rho_{BC}\frac{\delta\left[\left[Q^C,V\right],V\right]}{\delta Q^A}(x). \tag{16}$$

Ultima teorema extinde rezultatul Teoremei 1 la cazul teoriilor de camp. Mai mult, putem arata ca $\bar{\mathcal{V}}\left(Q^{A},\partial_{i}Q^{A}\right)$ este solutie a ecuatiilor

$$\frac{\delta\bar{\mathcal{V}}}{\delta Q^{A}}\left(x\right)=-\rho_{AC}\left[\left[Q^{C}\left(x\right),V\left(x^{0}\right)\right],V\left(x^{0}\right)\right], \tag{17}$$

de unde rezulta ca

$$\frac{\delta\bar{\mathcal{L}}_{0}}{\delta Q^{A}}=-\rho_{AB}\mathcal{E}^{B}\equiv-\rho_{AB}\left(\ddot{Q}^{B}\left(x\right)-\left[\left[Q^{B}\left(x\right),V\left(x^{0}\right)\right],V\left(x^{0}\right)\right]\right). \tag{18}$$

Rezultatele anterioare pot fi adaptate in prezenta gradelor de libertate fermionice prin introducerea unor factori de faza si prin utilizarea derivatelor la stanga sau la dreapta.

Exemple

e_1) Sa consideram o clasa de modele definite de Lagrangianul liniar in derivatele temporale

$$\mathcal{L}_{0}=\dot{\varphi}^{a}\pi_{a}-\frac{1}{2}\mu^{ab}\pi_{a}\pi_{b}+\frac{1}{2}\mu_{ab}\left(\partial_{i}\varphi^{a}\right)\left(\partial^{i}\varphi^{b}\right)-Z\left(\varphi^{a}\right) \tag{19}$$

unde obiectele (φ^{a},π_{a}) sunt campuri scalare si impulsurile canonic conjugate. In formula (19) notatia μ^{ab} semnifica o matrice constanta, simetrica si inversabila, μ_{ab} este inversa lui μ^{ab}, iar $Z\left(\varphi^{a}\right)$ este un potential arbitrar. Lagrangianul patratic in derivatele spatio-temporale capata forma concreta

$$\bar{\mathcal{L}}_{0}=\tilde{c}\left(\left(\partial_{\mu}\varphi^{a}\right)\left(\partial^{\mu}\pi_{a}\right)-\mu^{ab}\pi_{a}\frac{\partial Z}{\partial\varphi^{b}}\right), \tag{20}$$

unde $\tilde{c}$ este o constanta reala arbitrara nenula.

e_2) Lagrangianului campului Schrödinger cu potential independent de timp (din care obtinem ecuatia Schrödinger uniparticula)

$$\mathcal{L}_{0}=\mathrm{i}\hbar\psi^{*}\dot{\psi}+\psi^{*}\left(\frac{\hbar^{2}}{2m}\partial_{i}\partial_{i}-U\left(\mathbf{x}\right)\right)\psi, \tag{21}$$

ii corespunde Lagrangianul patratic in derivatele temporale dat de

$$\bar{\mathcal{L}}_{0}=\alpha\left(\hbar\dot{\psi}^{*}\dot{\psi}-\frac{1}{\hbar}\psi^{*}\left(\frac{\hbar^{2}}{2m}\partial_{i}\partial_{i}-U\left(\mathbf{x}\right)\right)^{2}\psi\right), \tag{22}$$

unde α este o constanta reala arbitrara nenula.

e_3) Lagrangianului campului Dirac

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_a \left(\mathrm{i} \left(\gamma^\mu \right)^a{}_b \left(\partial_\mu \psi^b \right) - m \psi^a \right), \tag{23}$$

ii este asociat Lagrangianul Klein–Gordon

$$\bar{\mathcal{L}}_0 = \beta \left(\left(\partial_\mu \bar{\psi}_a \right) \partial^\mu \psi^a - m^2 \bar{\psi}_a \psi^a \right), \tag{24}$$

unde β este o constanta reala arbitrara nenula.

e_4) In sfarsit, Lagrangianului campului vectorial nemasiv fixat gauge

$$\mathcal{L}_0 = \dot{A}^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} \pi_\mu \pi^\mu - \frac{1}{2} \left(\partial_i A_\nu \right) \partial^i A^\nu, \tag{25}$$

ii corespunde Lagrangianul patratic in derivatele spatio-temporale

$$\bar{\mathcal{L}}_0 = \gamma \left(\partial_\mu A_\nu \right) \partial^\mu \pi^\nu, \tag{26}$$

unde γ este o constanta reala arbitrara nenula.

Cel de-al doilea rezultat de baza este sintetizat de Teoremele 3 si 4.

Teorema 3 *Pentru orice Lagrangian liniar in derivate* $L_0(z, \dot{z}) = a_A(z) \dot{z}^A - V(z)$ *cu 2-forma simplectica nedegenerata exista Lagrangianul patratic in derivate* $\hat{L}_0(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} k_{AB} \left(\dot{z}^A - \left[z^A, V \right] \right) \left(\dot{z}^B - \left[z^B, V \right] \right)$ *astfel incat avem dubla implicatie*

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\delta L_0}{\delta z^A} = 0, \\ z^A(t_0) = z_0^A, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\delta \hat{L}_0}{\delta z^A} = 0, \\ z^A(t_0) = z_0^A, \ \dot{z}^A(t_0) = \left. \left[z^A, V \right] \right|_{z_0^A}, \end{array} \right. , \tag{27}$$

unde k_{AB} *este o matrice constanta, simetrica si inversabila.*

Este simplu de vazut ca ecuatiile Euler–Lagrange care se obtin din Lagrangianul $\hat{L}_0$ sunt exprimate prin

$$\begin{aligned} \hat{E}_A \equiv & \frac{\delta \hat{L}_0}{\delta z^A} \equiv -k_{AB} \ddot{z}^B + \left(k_{AC} \frac{\partial \left[z^C, V \right]}{\partial z^B} - k_{BC} \frac{\partial \left[z^C, V \right]}{\partial z^A} \right) \dot{z}^B + \\ & + k_{BC} \left[z^B, V \right] \frac{\partial \left[z^C, V \right]}{\partial z^A} = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Teorema 3 demonstreaza existenta unei formulari Lagrangiene a dinamicii unui sistem de clasa II liniar in derivate, care: a) este nedegenerata si patratica in derivate; b) este echivalenta, la nivelul solutiilor ecuatiilor de miscare supuse la conditii initiale mutual compatibile, cu formularea liniara in termenii acelorasi variabile. Remarcam faptul ca teorema anterioara are loc in niste conditii mai relaxate decat cele ale Teoremei 1 (matricea k_{AB} nu mai trebuie sa satisfaca relatiile (7).)

Urmand o linie similara cu cea din cazul sistemelor cu numar finit de grade de libertate ajungem la urmatoarea teorema.

Teorema 4 *Pentru orice Lagrangian liniar in derivate* $\mathcal{L}_0\left(Q^A,\partial_\mu Q^A\right)=\alpha_A(Q)\,\dot{Q}^A-\mathcal{V}\left(Q^A,\partial_i Q^A\right)$ *cu 2-forma simplectica nedegenerata exista Lagrangianul patratic in derivate*

$$\hat{\mathcal{L}}_0\left(Q^A,\partial_\mu Q^A\right)=\frac{1}{2}\rho_{AB}\left(\dot{Q}^A-\left[Q^A,V\right]\right)\left(\dot{Q}^B-\left[Q^B,V\right]\right), \tag{29}$$

astfel incat avem dubla implicatie

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta Q^A}=0,\\ Q^A\left(t_0,\mathbf{x}\right)=Q_0^A\left(\mathbf{x}\right),\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\frac{\delta\hat{\mathcal{L}}_0}{\delta Q^A}=0,\\ Q^A\left(t_0,\mathbf{x}\right)=Q_0^A\left(\mathbf{x}\right),\\ \dot{Q}^A\left(t_0,\mathbf{x}\right)=\left.\left[Q^A(x),V\left(x^0\right)\right]\right|_{Q_0^A(\mathbf{x})},\end{array}\right. \tag{30}$$

unde ρ_{AB} *este o matrice constanta, simetrica si inversabila.*

Teorema 4 extinde rezultatul Teoremei 3 la cazul teoriilor de camp.

Exemple

E_1) Lagrangianului $\hat{\mathcal{L}}_0$ pentru campul Schrödinger cu potential independent de timp are expresia

$$\hat{\mathcal{L}}_0=\lambda\hbar\mathcal{H}^1\mathcal{H}^2,\ \lambda=\mathrm{cons\,tan\,t}, \tag{31}$$

unde

$$\mathcal{H}^A\equiv\dot{Q}^A-\frac{(-)^A}{\mathrm{i}\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\partial_i\partial_i-U(\mathbf{x})\right)Q^A=0,\ Q^A=(\psi,\psi^*),\ A=1,2. \tag{32}$$

E_2) In cazul campului Dirac, Lagrangianul $\hat{\mathcal{L}}_0$ este dat de

$$\hat{\mathcal{L}}_0=\theta\left(\partial_\mu\bar{\psi}_a\partial^\mu\psi^a+m^2\bar{\psi}_a\psi^a-2\mathrm{i}m\bar{\psi}_a\left(\gamma^\mu\right)^a{}_b\,\partial_\mu\psi^b\right),\ \theta=\mathrm{cons\,tan\,t}. \tag{33}$$

Prin calcul direct gasim ca legatura dintre functiile E^A si $\hat{E}_A$ (a se vedea ecuatiile (9) si (28)) este data de relatiile

$$\hat{E}_A+k_{AB}E^B-\left(k_{AC}\frac{\partial\left[z^C,V\right]}{\partial z^B}-k_{BC}\frac{\partial\left[z^C,V\right]}{\partial z^A}\right)H^B=0, \tag{34}$$

unde matricea k_{AB} care apare in (34) reprezinta o matrice constanta, simetrica si inversabila care nu satisface alte conditii suplimentare. Formulele (34) impreuna cu rezultatele prezentate anterior conduc la echivalenta

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{E}_A = 0, \\ z^A(t_0) = z_0^A, \\ \dot{z}^A(t_0) = \left[z^A, V\right]\big|_{z_0^A}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} E^A = 0, \\ z^A(t_0) = z_0^A, \\ \dot{z}^A(t_0) = \left[z^A, V\right]\big|_{z_0^A}, \end{array} \right. , \tag{35}$$

care pune pe picior de egalitate ecuatiile

$$E^A \equiv \ddot{z}^A - \left[\left[z^A, V\right], V\right] = 0, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_A \equiv & -k_{AB}\ddot{z}^B + \left(k_{AC}\frac{\partial\left[z^C, V\right]}{\partial z^B} - k_{BC}\frac{\partial\left[z^C, V\right]}{\partial z^A}\right)\dot{z}^B + \\ & + k_{BC}\left[z^B, V\right]\frac{\partial\left[z^C, V\right]}{\partial z^A} = 0, \end{aligned} \tag{37}$$

in prezenta conditilor initiale

$$z^A(t_0) = z_0^A,\ \dot{z}^A(t_0) = \left[z^A, V\right]\big|_{z_0^A}. \tag{38}$$

O echivalenta similara se obtine si in cazul teoriilor de camp.

3 Concluzii

Concluziile de baza ale tezei sunt urmatoarele: a) sistemele de clasa II liniare in derivate cu 2-forma simplectica nedegenerata admit (la nivelul dinamicii clasice) o formulare Lagrangiana nedegenerata si patratica in derivate care este echivalenta, la nivelul solutiilor ecuatiilor de miscare supuse la conditii initiale mutual compatibile, cu formularea liniara in termenii acelorasi variabile; b) numarul gradelor fizice de libertate asociate formularii patratice este dublu fata de cel al formularii liniare.

In consecinta, desi solutiile problemelor Cauchy asociate celor doua formulari coincid, numarul gradelor fizice de libertate aferente acestora difera.

Bibliografie selectiva

[1] J. L. Lagrange, Mécanique analitique (Cambridge University Press, Cambridge, 2010)

[2] P. A. M. Dirac, Can. J. Math. **2** (1950) 129

[3] P. A. M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics (Academic Press, New York, 1967)

[4] M. Henneaux, C. Teitelboim, Quantization of Gauge Systems (Princeton University Press, Princeton, 1992)

[5] L. Faddeev, R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1692

[6] W. R. Hamilton, Phil. Trans. R. Soc. London **125** (1835) 95

[7] C. Bizdadea, M. M. Bârcan, I. Negru, S. O. Saliu, AIP Conf. Proc. **1387** (2011) 74

[8] C. Bizdadea, M. M. Bârcan, M. T. Miaută, S. O. Saliu, Mod. Phys. Lett. **A27** (2012) 1250062

[9] C. Bizdadea, M. M. Bârcan, M. T. Miaută, S. O. Saliu, Annals of the University of Craiova, Physics AUC **21** (2011) 121

[10] C. Bizdadea, M. M. Bârcan, M. T. Miaută, S. O. Saliu, AIP Conf. Proc. **1472** (2012) 12

[11] C. Bizdadea, M. M. Bârcan, I. Negru, S. O. Saliu, Analele Universitatii de Vest din Timisoara (seria Fizica) **55** (2011) 20

[12] C. Bizdadea, M. M. Bârcan, I. Negru, S. O. Saliu, Analele Universitatii de Vest din Timisoara (seria Fizica) **56** (2012) 58

[13] C. Bizdadea, M. M. Bârcan, E. M. Cioroianu, M. T. Miaută, S. O. Saliu, Rom. J. Phys. **58** (2013) 428

[14] C. Bizdadea, M. M. Bârcan, E. M. Cioroianu, M. T. Miaută, S. O. Saliu, S. C. Săraru, lucrare in curs de finalizare

[15] C. Bizdadea, M. M. Bârcan, E. M. Cioroianu, S. O. Saliu, S. C. Săraru, lucrare in curs de finalizare