Rezumat asupra tezei de doctorat
Clase de sisteme deductive intr-o BCK- algebră

Laura-Mihaela Dobre

Scopul acestei teze este de a prezenta noi rezultate privind laticele reziduate şi BCK algebrele, în special prin introducerea şi studierea noţiunilor de latice reziduată noetheriană şi artiniană şi latice Belluce asociată unei BCK algebre, precum şi prin studierea mai multor clase de filtre (sisteme deductive) în latici reziduate şi BCK algebre.

Rezultatele originale pe care le prezentăm în acestă teză se regăsesc în lucrările: [19], [20], [52]. Acestea au fost publicate sau sunt în curs de publicare.

Teoria laticelor reziduate este utilizată pentru a dezvolta algebric logica fuzzy ([58]) şi logica substructurală ([51]).

O latice reziduată ([30],[66]) este o structură algebrică $(L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ astfel încât $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice mărginită, $(L, \odot, 1)$ este un monoid comutativ şi pentru orice $x, y, z \in L$ avem $x \leq y \rightarrow z$ dacă şi numai dacă $x \odot y \leq z$.

Pentru a simplifica notaţia, o latice reziduată $(L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ va fi desemnată prin mulţimea sa suport L. De asemenea, vom nota cu B(L) mulţimea elementelor booleene ale lui L.

BL-algebrele sunt cazuri particulare de latici reziduate.

Un studiu recent privind BL-algebrele a fost realizat în 2012 de S.Motamed şi J. Moghaderi ([46]). Aceştia introduc noţiunile de BL algebră noetheriană şi artiniană şi probează teoreme de tip Anderson şi Cohen ([37]) pentru BL-algebre.

De subliniat este faptul că teoria algebrelor noetheriene şi artiniene a fost studiată în 1983 de C. Nastăsescu în cazul general al mulţimilor parţial ordonate.

Unul dintre obiectivele noastre în această teză este studierea laticelor reziduate noetheriene şi artiniene.

Un alt obiectiv este studierea diferitelor clase de filtre (sisteme deductive) în latici reziduate şi BCK algebre şi a conexiunilor dintre acestea.

De asemenea ne-am propus să construim şi să studiem laticea Belluce asociată unei BCK algebre A. Astefel, studiem spaţiile topologice Spec(A) şi Max(A) şi construim laticea Belluce asociată L_A.

Teza este compusă din 5 capitole şi este structurată astfel:

In introducere discutuăm despre motivaţia studierii acestor subiecte şi oferim o imagine de ansamblu asupra capitolelor următoare.

In capitolul 2 prezentăm definiţii de bază, exemple şi reguli de calcul în latici reziduate. Evidenţiem o diagramă de clasificare a laticilor reziduate şi un studiu privind filtrele (i-filtrele) în latici reziduate.

Suntem interesaţi în special de filtrele (i-filtrele) finit generate şi investigăm condiţiile în care mulţimea Min(F) a tuturor i-filtrelor minimale prime care conţin i-filtrul F

este finită (vezi Teorema 2.5).
Teorema 2.5. Fie F un i-filtru propriu al lui L. Dacă $Min_L \neq 0$ şi orice element din $Min_L(F)$ este finit generat, atunci mulţimea $Min_L(F)$ este finită.
Vom studia de asemenea, existenţa filtrelor în laticea reziduată produs $LXL^{'}$:
Teorema 2.6. Fie L şi $L^{'}$ două latici reziduate. Atunci K este un i-filtru în laticea produs $LXL^{'}$ dacă şi numai dacă există $F \in \mathbf{F}_i(L)$ şi $G \in \mathbf{F_i}(L^{'})$ astfel încât $K = FXG$.
In capitolul 3, lucrăm în cazul general al laticelor reziduate şi stabilim anumite conexiuni între filtrele regulate şi alte tipuri de filtre în latici reziduate: filtre Booleene, MV-filtre, filtre Stoneene, filtre divizibile.
Teoria filtrelor joacă un rol important în studiul algebrelor logicii fuzzy. Uneori filtrele mai sunt numite şi sisteme deductive ([48]).
Teoria filtrelor în latici reziduate a fost intens studiată şi au fost obţinute numeroase rezultate ([8], [9], [61], [68], [69]). In ([8]) este propusă o nouă abordare pentru studiul filtrelor în latici reziduate.
In spiritul acestei lucrări, în Capitolul 3 stabilim noi caracterizări ale filtrelor regulate într-o latice reziduată şi noi conexiuni între aceste filtre şi alte tipuri de filtre. Demonstrăm că o latice reziduată este Stoneană dacă şi numai dacă fiecare filtru este Stonean şi vom arăta că o latice reziduată verifică condiţia dublei negaţii dacă şi numai dacă fiecare filtru este regulat.
In capitolul 4 am studiat noţiunile de latice reziduată noetheriană şi artiniană geeneralizând rezultatele din lucrările ([46], [47]). Introducem aceste latici cu proprietatea că orice lanţ crescător (descrescător) de filtre este staţionar (vezi Definiţia 4.4). Obţinem definiţii echivalente pentru laticile reziduate artiniene şi noetheriene (vezi Teoremele 4.3 şi 4.4), studiem laticea factor a unei latici reziduate noetheriene (artiniene) (vezi Remarca 4.3) şi demonstrăm teoreme de tip Anderson şi Cohen (Teorema 4.7). (vezi cazul inelelor [37]).
In Capitolul 5, introducem noţiunea de latice Belluce asociată unei BCK-algebre.
Reticulaţia a fost definită pentru inele comutative de Simmons in [56] şi extinsă pentru inele necomutative de Belluce în [3]. Noţiunea a fost extinsă la algebrele Hilbert în [13] şi la latici reziduate în [47].
Utilizând modelele menţionate anterior, vom construi în acest capitol reticulaţia unei BCK algebre.
Capitolul este împărţit în 7 secţiuni.
In primele 3 secţiuni reamintim rezultatele preliminare privind BCK algebrele, rezultate ce vor fi utilizate în restul lucrării.
In secţiunea 4, pentru o BCK- algebră A, familia $\tau_A = \{D(x) : x \subseteq A\}$ este o topologie pentru Spec(A) având $\{D(a) : a \in A\}$ drept bază. Topologia τ_A se numeşte topologie Stone-Zariski şi astfel Spec(A) devine spaţiu topologic.
Am obţinut 2 rezultate importante:
1. Dacă A este o BCK algebră mărginită, pentru orice $a \in A$, $D_{Max(A)}(a) = D(A) \cap Max(A) = \{M \in Max(A) : a \notin M\}$ este o mulţime compactă în $Max(A)$ (Propoziţia 5.7).
2. Dacă A este o BCK algebră mărginită, Max(A) este un spaţiu topologic compact Hausdorff (Teorema 5.10).
In secţiunea 5, am definit o latice distributivă L_A, numită laticea Belluce asociată BCK algebrei A.
Principalul rezultat este următorul:

Dacă A este o BCK algebră mărginită, atunci $u_A : Max(A) \to Max(L_A)$ este un homeomorfism între spaţiile topologice Max(A) şi $Max(L_A)$ (Teorema 5.11).
In secţiunea 6, am definim reticulaţia unei BCK algebre mărginite $A : L_A$ şi probăm unicitatea acesteia. (Teorema 5.12).
In secţiunea 7, definim noţiunea de BCK algebră normală (utilizând modelul de la latici) şi îi dăm o caracterizare în Corolarul 5.13.

References

[1] R. Balbes, Ph. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, 1974.

[2] L. P. Belluce, *Semisimple algebras of infinite valued logic and bold fuzzy set theory*, Canadian Journal of Mathematics, Vol. XXXVIII, No. 6 (1986), 1356-1379.

[3] Belluce, L. P., *Spectral spaces and non-commutative rings,* Comm. Algebra, vol. 19, (1991), 1855-1865.

[4] L. P. Beluce, A. Di Nola, A. Lettieri, *Local MV-algebras*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, serie II, Vol. 42 (1993), 247-361.

[5] T. S. Blyth, M. F. Janovitz, *Residuation Theory*, Pergamon Press, 1972.

[6] T. S. Blyth, *Lattices and ordered algebraic structures*, Springer, Berlin, 2005.

[7] D. Buşneag, *Categories of Algebraic Logic*, Editura Academiei Române, Bucharest, 2006.

[8] D. Buşneag and D. Piciu, A new approach for classification of filters in residuated lattices, *Fuzzy Sets and Systems* **260** (2015), 121-130.

[9] D. Buşneag and D. Piciu, Semi-G-filters, Stonean filters, MTL-filters, divisible filters, BL-filters and regular filters in residuated lattices, *Iranian Journal of Fuzzy Systems* **13**(1) (2016),145-160.

[10] D. Buşneag, D. Piciu, *Residuated lattice of fractions relative to a* $\wedge-$*closed system*, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, Tome 49 (97), No. 1 (2006), 13-27.

[11] D. Buşneag, S. Rudeanu, *A glimpse of deductive systems in algebra*, Central European Journal of Mathematics, No. 8 (4) (2010), 688-705.

[12] D. Buşneag, D. Piciu, A. Jeflea, *Archimedean Residuated Lattices*, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University - Mathematics, Vol. LVI, (2010), 227-252.

[13] Buşneag, D., Piciu, D., *The Belluce lattice associated with a bounded Hilbert algebra*, Soft Computing, 19 (2015), 3031-3042.

[14] D. Buşneag, D. Piciu and J. Paralescu, *Divisible and semi-divisible residuated lattices*, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University - Mathematica, Tom LXI (2015), 287-318.

[15] C. Buşneag, D. Piciu, *The stable topologies for residuated lattices*, Soft Computing, 16 (2012), 1639-1655.

[16] C. Buşneag, *States and topologies on residuated lattices*, Ph.D. Thesis, University of Craiova, 2011.

[17] D. Buşneag, D. Piciu, *Some types of filters in residuated lattices*, Soft Computing, WP. 18, Issue 5(2014),825-837.

[18] D. Buşneag, D. Piciu, L.-C. Holdon, *Some properties of ideals in Stonean residuated lattices*, Journal of Multiple Valued Logic & Soft Computing, vol 24 (2015), 529-546.

[19] D. Buşneag, D. Piciu, **L. M. Dobre**, The Belluce- lattice associated with a bounded BCK algebras, (submitted Iranian Journal of Fuzzy Systems).

[20] D. Buşneag, D. Piciu, L.C. Holdon **L.M. Dobre**, *Noetherian and artinian algebras in the general case of residuated lattices*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (accepted).

[21] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 78, New York - Heidelberg Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[22] Celani, S.A., *Deductive systems of BCK algebras,* Acta Univ. Palackianae Olomoucensis, Facultas Rervoum Naturalium Mathematisa 43(1) (2004), 27-32.

[23] R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo, A. Torrens, *Basic fuzzy logic is the logic of continuous t-norm and their residua*, Soft Computing, Vol. 4 (2000), 106-112.

[24] W. H. Cornish, *Normal Lattices*, Journal of Australian Mathematical Society, Vol. 14, issue 02 (1972), 200-215.

[25] Daowu Pei, *Fuzzy Logic Algebras on Residuated Lattices*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, Vol. 28 (2004), 519-531.

[26] F. Esteva, L. Godo, *Monoidal $t-$norm based logic: towards a logic for left-continnuos $t-$norms*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 124, No. 3 (2001), 271-288.

[27] A. Filipoiu, G. Georgescu, A. Lettieri, *Maximal MV-algebras*, Mathware Soft-Computing, Vol. 4, No. 1 (1997), 53-62.

[28] P. Flondor, G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Pseudo-t-norms and pseudo-BL algebras*, Soft Computing, Vol. 5, No. 5 (2001), 355-371.

[29] H. Freytes, *Injectives in residuated algebras*, Algebra Universalis, Vol. 51, No. 4 (2004), 373-393.

[30] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, H. Ono, *Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics*, Studies in Logics and the Foundations of Mathematics, Elsevier, 2007.

[31] Georgescu, G., *The reticulation of a quantale*, Rev. Roum. Pures Appl, nr. 7-8, (1995), 619-631.

[32] Ghiţă , M., Contributions to the study of the category of Hilbert algebras, Ph. D. Thesis, University of Craiova, 2011.

[33] Gispert, A, Torrens, A., Boolean representation of bounded BCK-algebras, Soft Comput., vol. 12(2008), 941-954.

[34] Gispert , A, Torrens, A., Bounded BCK- algebras and their generated variety, Math. Logic Quarterly, 53 (2007), 206-213.

[35] P. Hájek, *Mathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[36] L. C. Holdon *Classes of residuated lattices*, Ph. D. Thesis, University of Craiova, 2014.

[37] T.W. Hungerford, *Algebra*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1974.

[38] P. M. Idziak, *Lattice operations in BCK-algebras*, Mathematica Japonica, 29 (1984), 839-846.

[39] A. Iorgulescu, *Algebras of logic as BCK algebras*, Academy of Economic Studies Bucharest, 2008.

[40] M. Kondo, *Simple characterization of strict residuated lattices with an involutive negation*, Soft Computing, Vol. 17 (2013), 39-44.

[41] Kűhr, J., *Pseudo BCK algebras and related structures*, Univ. Palackeho v Olomouci, 2007.

[42] L. Leuştean, G. Georgescu, C. Mureşan, *Maximal residuated lattices with lifting Boolean center*, Algebra Universalis, Vol. 63, No. 1 (2008), 83-99.

[43] L. Leuştean, *Representation of many-valued algebras*, Ph.D. Thesis, University of Bucharest, 2003.

[44] Leuştean, L., *The prime and maximal spectra and the reticulation of BL-algebras*, Central European Journal of Mathematics, No. 3 (2003), 382-397.

[45] N. Mohtashamnia, Arsham Borumand Saeid, *A special type of BL-algebra*, Annals of the University of Craiova - Mathematics and Computer Science Series, Vol. 39 (2012), 8-20.

[46] S. Motamed, J. Moghaderi, *Noetherian and Artinian BL-algebras*, Soft Computing, Vol. 16, No. 11 (2012), 1989-1994.

[47] C. Mureşan, *The Reticulation of a Residuated Lattice*, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, Tome 51 (99), No. 1 (2008), 47-65.

[48] Mureşan, C., *Characterisation of the reticulation of a residuated lattice*, J. of Mult.-Valued Logic& Soft Computing, Vol. 16 (2010), 427-447.

[49] C. Mureşan, *Co-Stone Residuated Lattices*, Annals of the University of Craiova - Mathematics and Computer Science Series, Vol. 40 (2013), 52-75.

[50] C. Năstăsescu, *Teoria dimensiunii in algebra necomutativă*, Editura Academiei Române, Bucharest, 1983.

[51] H. Ono, *Substructural logics and residuated lattices - an introduction*, 50 Years of Studia Logica, Trends in Logic, Kluwer Academic Publishers 21 (2003), 193-228.

[52] D. Piciu, **L.M. Dobre**, Note on the regular filter in residuated lattices, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series. Vol.44(2), 2017, 283-294.

[53] D. Piciu, *Algebras of Fuzzy Logic*, Editura Universitaria Craiova, Craiova (2007).

[54] E. Post, *Introduction to a general theory of elementary propositions*, American Journal of Mathematics, Vol. 43 (1921) 163-185.

[55] J. Rachůnek, *A non-commutative generalization of MV-algebras*, Czechoslovak Journal of Mathematics, Vol. 52 (2002), 255-273.

[56] Simmons, H., *Reticulated rings*, J. of Algebra 66 (1980), 169-192.

[57] M. H. Stone, *Topological representations of distributive lattices and Browerian logics*, Casopispest. Math. 67 (1937), 1-25.

[58] E. Turunen, *Mathematics Behind Fuzzy logic*, Physica-Verlag, New York 1999.

[59] E. Turunen, *Local BL-algebras*, Multiple-Valued Logic, Vol. 6, No. 1-2 (2001), 229-249.

[60] E. Turunen, J. Mertanen, *States on semi-divisible residuated lattices*, Soft Computing, Vol. 12 (2008), 353-357.

[61] B. Van Gasse, G. Deschrijver, C. Cornelis and E. Kerre, Filters of residuated lattices and triangle algebras, *Information Sciences* **180** (16) (2010), 3006-3020.

[62] J. Varlet, *On the characterization of Stone lattices*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), Vol. 27 (1966), 81-84.

[63] Y. Xu, D. Ruan, K. Y. Qin, J. Liu, *Lattice-Valued Logic*, Springer, Berlin, 2003.

[64] Wallman, H., *Lattices and topological spaces*, Amer. Math. (2), vol.39 (1938), 112-126.

[65] M. Ward, *Residuated distributive lattices*, Duke Mathematical Journal, Vol. 6, No. 3 (1940), 641-651.

[66] M. Ward, R. P. Dilworth, *Residuated lattices*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 45 (1939), 335-354.

[67] O. Zahiri, *Chain conditions on BL-algebras*, Soft Computing, 18 (2014), 419-426.

[68] M. Zhenming, MTL-filters and their characterizations in residuated lattices, *Computer Engineering and Applications* **48** (20) (2012), 64-66.

[69] Y. Zhu, Y. Xu, *On filter theory of residuated lattices*, Information Science, Vol. 180 (2010), 3614-3632.