UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA
FACULTATEA DE ŞTIINŢE
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ

Teză de doctorat

Controllability problems for partial differential equations

Autor
Temereancă Laurenţiu-Emanuel

Craiova-2015

Rezumat

În ultimele decade domeniul teoriei controlului a fost la interfaţa dintre creativitatea matematică, inginerie şi informatică. Scopul teoriei controlului este să ajute la înţelegerea principiilor fundamentale ale controlului şi să le caracterizeze matematic într-un mod ce poate fi folosit pentru obţinerea exactă a unor controale capabile a să îndeplinească un scop precizat.

Această teză îşi propune să studieze probleme de controlabilitate ale unor ecuaţii cu derivate parţiale. Astfel, în timp ce Capitolele 2 şi 3, abordează proprietăţi calitative ale controlului ecuaţiilor căldurii şi respectiv undelor cu potenţial (controlabilitatea în timp optimal şi mărginirea normei controlului în raport cu potenţialul), în Capitolele 4 şi 5 scopul este de a asigura convergenţa schemei de aproximare. Metoda de bază utilizată de-a lungul acestei teze este una clasică, prin care se reduce problema de control la o problemă de momente a cărei soluţie este dată de un şir biortogonal la o familie de funcţii exponenţiale. Vom da pe scurt o prezentare a acestei metode. Fie $(\lambda_n)_n \in \mathbb{C}$ familia de valori proprii ale operatorului nemărginit corespunzător problemei noastre. Cu ajutorul dezvoltării în serie Fourier a soluţiei, problema de controlabilitate se reduce la a găsi o funcţie $v \in L^2(0,T)$ astfel încât, pentru fiecare n,

$$\int_0^T v(t)\, e^{\overline{\lambda}_n t} dt = \widehat{a}_n, \tag{1}$$

unde $(\widehat{a}_n)_n$ este un şir de numere complexe dat de data iniţială pe care vrem s-o controlăm.

Problemele de tipul (1) sunt cunoscute sub numele de *probleme de momente*. Soluţiile acestor probleme pot fi construite cu ajutorul şirurilor biortogonale. Într-adevăr, dacă $(\theta_m)_m$ este un şir biortogonal la familia de funcţii exponenţiale $(e^{\lambda_n t})_n$ în $L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$, atunci o soluţie v a problemei (1) va fi dată de

$$v(t) = \sum_n \widehat{a}_n e^{-\overline{\lambda}_n \frac{T}{2}} \theta_n\left(t - \frac{T}{2}\right) \qquad (t \in (0,T)). \tag{2}$$

Observăm că expresia din partea dreaptă a relaţiei (2) este, în principiu, formală. Pentru a arăta că această expresie are sens în spaţiul $L^2(0,T)$ trebuie să demonstrăm întâi că există un şir biorthogonal $(\theta_m)_m$ la familia $\left(e^{\lambda_n t}\right)_n$ în $L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$, evaluăm acest şir biortogonal în norma L^2 şi concluzionăm că seria este convergentă în $L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ folosind, de exemplu,

criteriul de convergenţă absolută. Aceiaşi paşi trebuie urmaţi chiar dacă suma din (2) este finită, dar avem nevoie de evaluarea în norma L^2 a controlului v. Acesta este cazul problemelor în dimensiune finită provenind din discretizarea ecuaţiilor cu derivate parţiale.

În continuare prezentăm pe scurt conţinutul şi rezultatele principale din fiecare capitol.

În **Capitolul 1** sunt prezentate unele noţiuni şi proprietăţi cunoscute, cum ar fi şiruri biortogonale şi familii Riesz, care vor fi folosite pe tot parcursul acestei teze. Cel mai important rezultat arată cum putem obţine un şir biortogonal $(\theta_n)_{n\geq 1}$ la un şir de vectori $(f_n)_{n\geq 1}$ din spaţiul Hilbert H care verifică

$$C\sum_{n\geq 1}|a_n|^2 \leq \left\|\sum_{n\geq 1} a_n f_n\right\|^2, \tag{3}$$

pentru orice şir finit $(a_n)_{n\geq 1}$, unde C este o constantă pozitivă.
Mai mult, evaluăm norma acestui şir biortogonal în raport cu constanta C care apare în (3) şi arătăm că următoarea estimare are loc

$$\left\|\sum_{m\geq 1} b_m \theta_m\right\|^2 \leq \frac{1}{C}\sum_{m\geq 1}|b_m|^2, \tag{4}$$

pentru orice şir finit $(b_m)_{m\geq 1}$.

Acest tip de estimări este foarte util, de exemplu, pentru a evalua norma soluţiilor problemei de momente, precum cea dată de (2).

Capitolul 2 intitulat **Time optimal control problem for the heat equation in a ball** se bazează pe lucrarea *A time optimal boundary controllability for the heat equation in a ball* scrisă în colaborare cu S. Micu [18] şi publicată în Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. În acest capitol, studiem problema de control în timp optimal pentru ecuaţia căldurii în bila de dimensiune doi. Mai precis, considerăm ecuaţia căldurii

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \Delta z(x,t) \text{ for } \ (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \tag{5}$$

cu condiţii iniţiale şi pe frontieră

$$z(x,t) = u(x,t) \ \text{ on } \ \Gamma\times(0,\infty), \tag{6}$$

$$z(x,t) = 0 \ \text{ on } \ (\partial\Omega\setminus\Gamma)\times(0,\infty), \tag{7}$$

$$z(x,0) = z_0(x) \quad \text{for} \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

unde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ este bila unitate şi Γ este o submulţime nevidă deschisă a frontierei $\partial\Omega$.

Este ştiut faptul că sistemul dat de (5)-(8) este nul controlabil în orice timp $\tau > 0$, adică pentru orice $z_0 \in H^{-1}(\Omega)$ există un control $u \in L^2(\Gamma \times [0,\tau])$ astfel încât soluţia corespunzătoare sistemului (5)-(8) verifică

$$z(\cdot,\tau) = 0. \tag{9}$$

Dat $M > 0$ definim mulţimea controalelor admisibile prin

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in L^\infty(\Gamma \times [0,\infty)) \mid |u(x,t)| \leq M \text{ a.p.t. } (x,t) \in \Gamma \times [0,\infty)\}.$$

Pe de altă parte, pentru fiecare $z_0 \in H^{-1}(\Omega)$, definim mulţimea stărilor atinse din z_0 astfel

$$\mathcal{R}(z_0,\mathcal{U}_{ad}) = \{z(\tau) \mid \tau > 0 \text{ şi } z \text{ este soluţia sistemului}$$

$$\text{(5)-(8) cu } u \in \mathcal{U}_{ad}\}.$$

Pentru $z_0 \in H^{-1}(\Omega)$ şi $z_1 \in \mathcal{R}(z_0,\mathcal{U}_{ad})$, *problema de control în timp optimal asociată sistemului (5)-(8)* constă în determinarea unei intrări $u^* \in \mathcal{U}_{ad}$ astfel încât soluţia corespunzătoare z^* a sistemului (5)-(8) satisface

$$z^*(\tau^*(z_0,z_1)) = z_1,$$

unde $\tau^*(z_0,z_1)$ este timpul minim necesar pentru a duce data iniţială z_0 la data finală z_1 cu controale în $\mathcal{U}_{ad}$,

$$\tau^*(z_0,z_1) = \inf_{u\in\mathcal{U}_{ad}} \{\tau \mid z(\cdot,\tau) = z_1,\ z \text{ este soluţia sistemului (5)-(8)}\}. \tag{10}$$

Studiul problemelor de control în timp optimal pentru ecuaţii cu derivate parţiale a început în anii şaizeci şi progresele înregistrate apoi au fost raportate succesiv în cărţile lui Lions [12] şi Fattorini [5]. Cele mai multe din problemele studiate s-au axat pe operatori de control inversabili şi numai în ultimii ani operatorii de control nemărginiţi au fost luaţi în considerare. În lucrarea [15], existenţa, unicitatea şi proprietatea de bang-bang pentru controalele pe frontieră în timp optimal ale ecuaţiei căldurii au fost demonstrate în cazul *domeniilor rectangulare*. Strategia a constat în a arăta că o inegalitate de observabilitate pentru soluţiile ecuaţiei căldurii cu un număr finit de moduri şi o estimare atentă a costului controlului corespunzător permit aplicarea metodei Lebeau-Robbiano [10] şi rezolvarea problemei. Acesta a fost primul rezultat privind controlul în timp optimal pe frontiera unui domeniu de dimensiune doi.

Scopul acestui capitol este de a utiliza strategia din [15] pentru a arăta că proprietăţi similare ale controlului în timp optimal pe frontieră a ecuaţiei căldurii au loc şi în bila de dimensiune doi Ω (a se vedea Teorema 2.1.1). Principala diferenţă în raport cu cazul domeniului rectangular tratat în [15] constă în faptul că avem de demonstrat o *inegalitate de tip Remez* pentru o clasă mai generală de funcţii exponenţiale ale căror exponenţi includ zerourile funcţiilor Bessel de speţa întâi. Acest lucru se face combinând rezultatele lui Borwein şi Erdely din [2] cu estimări pentru controale în timp mic obţinute în [20].

Capitolul 3 intitulat **Controllability of the wave equation with a potential** este bazat pe lucrarea *Controllability of the linear wave equation with a potential* care este scrisă în colaborare cu S. Micu [19]. Acest capitol studiază cum depinde norma controlului ecuaţiei undelor de norma potenţialului a prezent în ecuaţie şi de data iniţială pe care vrem s-o controlăm. Mai precis, dând $T > 0$ considerăm ecuaţia undelor unu dimensională cu potenţial

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) + a(x)u(t,x) = 0 & t > 0,\ x \in (0,1) \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(t,1) = v(t) & t > 0 \\ u(0,x) = u^0(x), \quad u_t(0,x) = u^1(x) & x \in (0,1), \end{cases} \tag{11}$$

unde potenţialul $a \in L^\infty(0,1)$ este o funcţie cu valori reale astfel încât $a(x) \geq 0$ a.p.t. în $(0,1)$ şi $\|a\|_{L^\infty} > 1$. Ecuaţia (11) se zice *nul-controlabilă în timpul* T dacă, pentru orice dată iniţială $(u^0, u^1) \in \mathcal{H} := L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$, există o funcţie $v \in L^2(0,T)$ astfel încat soluţia corespunzătoare sistemului (11) verifică

$$u(T,x) = u_t(T,x) = 0 \qquad (x \in (0,1)). \tag{12}$$

Ecuaţia (11) reprezintă o posibilă perturbare a ecuaţiei undelor liniară şi este frecvent întâlnită atunci când studiem stabilitatea soluţiilor staţionare pentru mai multe sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale (unde-Schrödinger, Maxwell-Schrödinger, Maxwell-Dirac şi multe altele). Când a este o funcţie constantă, (11) este cunoscută ca ecuaţia Klein Gordon şi joacă un rol important în teoria câmpului cuantic. De asemenea, ea apare atunci când separarea variabilelor este considerată în ecuaţia undelor liniară multidimensională. Problema de nul-controlabilitate pentru ecuaţia undelor perturbată a fost studiată şi a primit un raspuns pozitiv chiar şi în contexte mai generale (a se vedea, de exemplu, [1, 4, 9, 21, 22]). De obicei, problema se reduce la o inegalitate de observabilitate pentru sistemul adjunct, care este demonstrată prin utilizarea tehnicilor bazate pe analiza spectrală nonarmonică, multiplicatori sau inegalităţi de tip Carleman.

Aşa cum am mentionat mai sus, suntem interesaţi să studiem comportamentul normei controlului când $\|a\|_\infty$ tinde la infinit. Este cunoscut faptul că (a se vedea, de exemplu [22]) există două constante pozitive C şi ω astfel încât norma L^2 a controlului v corespunzător sistemului (11) verifică

$$\|v\|_{L^2(0,T)} \leq C \exp\left(\omega\sqrt{\|a\|_\infty}\right) \|(u^0, u^1)\|_{\mathcal{H}} \qquad \left((u^0, u^1) \in \mathcal{H}\right). \tag{13}$$

În acest capitol vom arăta că putem găsi o constantă $C > 0$ astfel încât, dând orice $a \in L^\infty(0,1)$ şi $T > 2$, există un spaţiu infinit dimensional $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ cu proprietatea că

$$\|v\|_{L^2(0,T)} \leq C\|(u^0, u^1)\|_{\mathcal{H}} \qquad \left((u^0, u^1) \in \mathcal{H}_1\right), \tag{14}$$

unde v este controlul de norma L^2 minimă corespunzător datei iniţiale (u^0, u^1) şi

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} a_n \Phi^n \;\middle|\; a_n = 0 \text{ pentru } |n| \leq \mathcal{N} := c\|a\|_\infty \ln^2(\|a\|_\infty) \right\}, \tag{15}$$

unde c este o constantă pozitivă absolută şi Φ^n sunt fruncţiile proprii normalizate ale operatorului diferenţial corespunzător sistemului (11).

Rezultatul principal (14)-(15) este descris de Teorema 3.4.1. El se demonstrează reducând problema de controlabilitate la o problemă de momente similară cu (1). Apoi, construim un şir biortogonal $(\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ cu proprietăţi speciale care ne ajută să obţinem estimarea (14). De, fapt vom reuşi să demonstrăm că normele elementelor şirului biortogonal $\|\theta_n\|_{L^2}$ sunt uniform mărginite în raport cu $\|a\|_\infty$ atâta timp cât $|n| \geq c\|a\|_\infty \ln^2(\|a\|_\infty)$. Observăm că inegalitatea (14) arată că data iniţială având doar moduri proprii suficient de mari poate fi controlată cu un cost independent de norma L^∞ a potenţialului a.

Capitolul 4 intitulat **Approximation of the controls for the beam equation** este bazat pe lucrarea *Approximation of the controls for the linear beam equation* care este scrisă în colaborare cu S. Micu şi I. Rovenţa [16] şi se află în evaluare la revista Mathematics of Control, Signals, and Systems. În acest capitol considerăm schema semi-discretă cu diferenţe finite pentru aproximarea controalelor exacte pe frontieră pentru ecuaţia barei 1–D ce modelează vibraţiile transversale ale unei bare fixată la capete:

$$\begin{cases} u''(t,x) + u_{xxxx}(t,x) = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,1) \\ u(t,0) = u(t,1) = u_{xx}(t,0) = 0 & t \in (0,T) \\ u_{xx}(t,1) = v(t) & t \in (0,T) \\ u(0,x) = u^0(x) & x \in (0,1) \\ u'(0,x) = u^1(x) & x \in (0,1). \end{cases} \tag{16}$$

Vom arăta convergenţa controlului discret dacă data iniţială continuă este suficient de regulată sau dacă frecvenţele înalte ale discretizării sale sunt filtrate. În ambele cazuri, controalele discrete de norma L^2 minimă cu ponderi sunt convergente la un control al problemei continue când pasul de discretizare tinde la zero.

Mai precis, considerăm $N \in \mathbb{N}^*$, un pas $h = \frac{1}{N+1}$ şi o discretizare echidistantă a intervalului $(0,1)$, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N < x_{N+1} = 1$, cu $x_j = jh$ pentru orice $j \in [0, N+1]$. O semi-discretizare în spaţiu cu diferente finite a sistemului (16) este dată de următorul sistem

$$\begin{cases} u_j''(t) + \frac{u_{j+2}(t) - 4u_{j+1}(t) + 6u_j(t) - 4u_{j-1}(t) + u_{j-2}(t)}{h^4} = 0 & 1 \le j \le N,\ t \in (0,T) \\ u_0(t) = 0, \quad u_{N+1}(t) = 0 & t \in (0,T) \\ u_{-1}(t) = -u_1(t), \quad u_{N+2}(t) = h^2 v_h(t) - u_N(t) & t \in (0,T) \\ u_j(0) = u_j^0(x), \quad u_j'(0) = u_j^1(x) & 1 \le j \le N. \end{cases} \tag{17}$$

Vom spune că sistemul (17) este *nul controlabil în timp* $T > 0$ dacă pentru orice dată iniţială $\begin{pmatrix} U_h^0 \\ U_h^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_j^0 \\ u_j^1 \end{pmatrix}_{1 \le j \le N} \in \mathbb{C}^{2N}$ găsim un control $v_h \in L^2(0,T)$ astfel încât soluţia corespunzătoare $(u_j, u_j')_{1 \le j \le N}$ a sistemului (17) verifică

$$u_j(T) = u_j'(T) = 0 \qquad (1 \le j \le N). \tag{18}$$

Este uşor de observat că sistemul (17) este nul controlabil. O întrebare mult mai dificilă se referă la comportamentul controalelor discrete v_h când h tinde la zero. Într-adevăr, conjectura naturală conform căreia familia $(v_h)_{h>0}$ converge, când h tinde la zero, la un control v al ecuaţiei continue (16) s-a dovedit a fi falsă. Aceasta este o consecinţă a lui [11, Theorem 2.1], unde se arată că inegalitatea de observabilitate corespunzătoare lui (17) nu este uniformă în h. Mai exact, dacă notăm cu $\| \cdot \|_{1,-1}$ versiunea discretă a normei $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$ în spaţiul $\mathcal{H} = H_0^1(0,1) \times H^{-1}(0,1)$, se poate demonstra că, pentru orice $h > 0$, există o constantă $C = C(T,h)$ astfel încât

$$\left\| \left(\begin{array}{c} w_j \\ w_j' \end{array} \right)_{1\le j\le N} (0) \right\|_{1,-1}^2 \le C \int_0^T \left| \frac{w_N(t)}{h} \right|^2 dt, \tag{19}$$

pentru orice $\left(\begin{array}{c} w_j^0 \\ w_j^1 \end{array} \right)_{1\le j\le N} \in \mathbb{C}^{2N}$ şi $\left(\begin{array}{c} w_j \\ w_j' \end{array} \right)_{1\le j\le N}$ soluţie a ecuaţiei adjuncte

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_j''(t) + \frac{w_{j+2}(t)-4w_{j+1}(t)+6w_j(t)-4w_{j-1}(t)+w_{j-2}(t)}{h^4} = 0 & 1 \le j \le N,\ t \in (0,T) \\ w_0(t) = 0, \quad w_{N+1}(t) = 0 & t \in (0,T) \\ w_{-1}(t) = -w_1(t), \quad w_{N+2}(t) = -w_N(t) & t \in (0,T) \\ w_j(T) = w_j^0(x), \quad w_j'(T) = w_j^1(x) & 1 \le j \le N, \end{array} \right. \tag{20}$$

dar

$$\lim_{h\to 0} \sup_{(w,\, w') \text{ soluţia lui } (20)} \frac{\left\| \left(\begin{array}{c} w_j \\ w_j' \end{array} \right) (0) \right\|_{1,-1}^2}{\displaystyle\int_0^T \left| \frac{w_N(t)}{h} \right|^2 dt} = \infty. \tag{21}$$

Relaţia (21) arată că $C(T,h)$ din (19) explodează când h tinde la zero şi aceasta înseamnă că (20) *nu este uniform observabil (în raport cu h)*. În mod echivalent, vom spune că sistemul (17) *nu este uniform controlabil.* Aceasta implică faptul că există cel puţin o dată iniţială $\left(\begin{array}{c} u^0 \\ u^1 \end{array} \right) \in \mathcal{H}$ astfel încât orice şir de controale discrete $(v_h)_{h>0}$ ale sistemului (17) diverg în $L^2(0,T)$ când h tinde la zero.

În scopul de a obţine inegalitatea uniformă de observabilitate pentru sistemul discret au fost propuse şi analizate în [11] două posibilităţi. Primul procedeu consideră doar controlul proiecţiilor soluţiilor sistemului (20) pe un spaţiu în care frecvenţele înalte au fost filtrate. În acest caz, inegalitatea de observabilitate corespunzătoare devine uniformă şi, în consecinţă, proiecţia soluţiei sistemului (17) pe acest spaţiu filtrat este controlată la zero uniform. În cel de-al doilea procedeu analizat în [11], cantitatea din partea dreaptă din (19) a fost consolidată prin introducerea unui termen suplimentar. Se obţine astfel că un control pe frontieră adiţional, care tinde la zero în norma $H^{-1}(0,T)$ când h se duce la zero, face sistemul uniform controlabil.

Capitolul nostru studiază cum rezultatul de controlabilitate uniformă depinde de regularitatea şi discretizarea datei iniţiale $\left(\begin{array}{c} u^0 \\ u^1 \end{array} \right)$. În primul rând, arătăm că, dacă data iniţială este suficient de regulată (de exemplu, dacă este în spaţiul $H^3(0,1)\cap H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)$), atunci discretizarea prin puncte asigură existenţa unei familii convergente de controale aproximante $(v_h)_{h>0}$ (vezi Teorema 4.4.5).

Al doilea rezultat principal demonstrat în aceast capitol consideră cazul datelor iniţiale în spaţiul $\mathcal{H}$ şi arată că, dacă frecvenţele înalte ale discretizării acestora sunt filtrate, atunci convergenţa familiei de controale aproximante poate fi asigurată (vezi Theorema 4.4.2). Subliniem faptul că noi am ales un mod adecvat de filtrare doar a datei iniţiale pentru a obţine rezultatul de uniform controlabilitate pentru întreaga soluţie şi nu doar pentru proiecţia sa ca în [11]. Problema convergenţei controalelor de normă L^2 minimă, aşa numitele controale HUM, este studiată în Teoremele 4.5.1 şi 4.5.2, cu fiecare dintre cele două procedee menţionate anterior.

Aceste rezultate sunt demonstrate prin reducerea problemei noastre la o problemă de momente căreia îi construim o soluţie aproximantă cu proprietăţile dorite. Această construcţie foloseşte o idee din [8]. În acest caz problema de momente are valorile proprii date explicit de familia $(i\lambda_n)_{1\leq|n|\leq N}$, unde

$$\lambda_n = sgn(n)\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{n\pi h}{2}\right) \qquad (1\leq|n|\leq N), \tag{22}$$

şi coeficienţii $\widehat{a}_n = \frac{sgn(n)\, i\,(-1)^n}{\cos\left(\frac{n\pi h}{2}\right)}a^0_{nh}$, unde $(a_{nh})_{1\leq|n|\leq N}$ sunt coeficienţii Fourier ai datei iniţiale discrete $\begin{pmatrix} U_h^0 \\ U_h^1 \end{pmatrix}$. Profitând de valorile explicite ale şirului $(\lambda_n)_{1\leq|n|\leq N}$, construim un şir biortogonal $(\theta_m)_{1\leq|m|\leq N}$ la familia $\left(e^{i\lambda_n t}\right)_{1\leq|n|\leq N}$ şi evaluăm norma elementelor sale. Apoi, ca în (2), obţinem o soluţie a problemei noastre discrete cu proprietăţile de mărginire necesare.

Capitolul 5 intitulat **Approximation of the controls for the wave equation with a potential** este bazat pe lucrarea *Approximation of the controls for the linear wave equation with a potential* care este scrisă în colaborare cu S. Micu şi I. Rovenţa [17]. În acest capitol analizăm convergenţa controalelor pe frontieră a ecuaţiei undelor semi-discretă la un control al ecuaţiei undelor continuă cu potenţial

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) + a(x)u(t,x) = 0 & t>0,\ x\in(0,1) \\ u(t,0) = 0 & t>0 \\ u(t,1) = v(t) & t>0 \\ u(0,x) = u^0(x), \quad u_t(0,x) = u^1(x) & x\in(0,1), \end{cases} \tag{23}$$

unde $a:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ şi $a\in L^\infty(0,1)$.

Pentru orice $N \in \mathbb{N}^*$, considerăm punctele echidistante, $x_j = jh$, $0 \leq j \leq N+1$, unde $h = \frac{1}{N+1}$ reprezintă pasul de discretizare şi fie $a_j = a(x_j)$. Semi-discretizarea în spaţiu cu diferenţe finite a lui (23) este dată de următorul sistem

$$\begin{cases} u_j''(t) - \frac{u_{j+1}(t)-2u_j(t)+u_{j-1}(t)}{h^2} + a_j u_j(t) = 0 & 1 \leq j \leq N,\ t > 0 \\ u_0(t) = 0 & t \in (0,T) \\ u_{N+1}(t) = v_h(t) & t \in (0,T) \\ u_j(0) = u_j^0(x), \quad u_j'(0) = u_j^1(x) & 1 \leq j \leq N. \end{cases} \tag{24}$$

Este uşor de observat că (23) este *nul controlabil în timpul* $T > 0$ adică, pentru orice dată iniţială $\begin{pmatrix} U_h^0 \\ U_h^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_j^0 \\ u_j^1 \end{pmatrix}_{1\leq j\leq N} \in \mathbb{C}^{2N}$, găsim un control $v_h \in L^2(0,T)$ astfel încât soluţia corespunzătoare $\begin{pmatrix} u_j \\ u_j' \end{pmatrix}_{1\leq j\leq N}$ a sistemului (23) verifică

$$u_j(T) = u_j'(T) = 0 \qquad (1 \leq j \leq N). \tag{25}$$

Este cunoscut faptul că şirul $(v_h)_{h>0}$ poate să nu fie mărginit în $L^2(0,T)$. Dacă notăm cu $\|\cdot\|_{0,-1}$ versiunea discretă a normei $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ în spaţiul $\mathcal{H} = L^2(0,1)\times H^{-1}(0,1)$, se poate arăta că, pentru orice $h > 0$, există o constantă $C = C(T,h)$ astfel încât

$$\left\| \begin{pmatrix} w_j \\ w_j' \end{pmatrix}_{1\leq j\leq N} (0) \right\|_{0,-1}^2 \leq C \int_0^T \left| \frac{w_N(t)}{h} \right|^2 dt, \tag{26}$$

pentru orice $\begin{pmatrix} w_j^0 \\ w_j^1 \end{pmatrix}_{1\leq j\leq N} \in \mathbb{C}^{2N}$ şi $\begin{pmatrix} w_j \\ w_j' \end{pmatrix}_{1\leq j\leq N}$ soluţia ecuaţiei adjuncte

$$\begin{cases} w_j''(t) - \frac{w_{j+1}(t)-2w_j(t)+w_{j-1}(t)}{h^2} + a_j w_j(t) = 0 & 1 \leq j \leq N,\ t \in (0,T) \\ w_0(t) = 0, \quad w_{N+1}(t) = 0 & t \in (0,T) \\ w_j(T) = w_j^0(x), \quad w_j'(T) = w_j^1(x) & 1 \leq j \leq N. \end{cases} \tag{27}$$

Inegalitatea (26) asigură proprietatea de nul-controlabilitate a sistemului (24). Cu toate acestea, se poate arăta că (a se vedea, de exemplu, [7]) există $a \in L^\infty(0,1)$ astfel încât

$$\lim_{h\to 0} \sup_{(w,\, w')\ \text{soluţia lui (27)}} \frac{\left\| \begin{pmatrix} w_j \\ w_j' \end{pmatrix} (0) \right\|_{0,-1}^2}{\displaystyle\int_0^T \left| \frac{w_N(t)}{h} \right|^2 dt} = \infty. \tag{28}$$

Observăm că (26) este o versiune discretă a inegalităţii de observabilitate pentru ecuaţia continuă (24) iar (28) ne arată explozia constantei de observabilitate discretă $C(T,h)$ când h tinde la zero. În acestă situaţie vom spune că sistemul (27) *nu este uniform (în raport cu h) observabil* sau sistemul (24) *nu este uniform controlabil*. Este cunoscut faptul că acest lucru este echivalent cu faptul că există cel puţin o dată iniţială $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ căreia îi corespunde un şir de controale $(v_h)_{h>0}$ nemărginit.

Cazul $a \equiv 0$ a fost studiat în mai multe lucrări şi au fost propuse mai multe metode de remediere a acestui defect. De exemplu, [7] consideră soluţii filtrate, [3] analizează elementele finite mixte, [13] introduce o vâscozitate numerică şi [6] utilizează metoda bi-grid. În [14] este arătat că, filtrând data iniţială discretă pe care vrem s-o controlăm, proprietatea de uniform controlabilitate poate fi asigurată. În acest capitol noi studiem aceleaşi proprietăţi pentru sistemul (24). Principala dificultate a problemei vine din necesitatea de a avea o analiză spectrală detaliată a operatorului discret corespunzător sistemului (27) şi din lipsa unor expresii explicite pentru valorile şi funcţiile proprii.

Scopul este de a arăta că, dacă frecvenţele înalte ale discretizării $\begin{pmatrix} u_j^0 \\ u_j^1 \end{pmatrix}_{1\leq j\leq N}$ sunt filtrate, atunci convergenţa familiei de controale aproximante $(v_h)_{h>0}$ poate fi asigurată (vezi Teorema 5.6.2). Mai mult, arătăm că există un spaţiu de date iniţiale regulate care sunt uniform controlabile (vezi Teorema 5.6.3), dacă data iniţială discretă este dată de discretizarea clasică prin puncte.

Tehnica utilizată în această lucrare reduce problema de controlabilitate la o problemă de momente care este rezolvată cu ajutorul construcţiei unui şir biortogonal $(\theta_m)_{1\leq|m|\leq N}$ la familia de funcţii exponenţiale $\left(e^{i\lambda_{hn}t}\right)_{1\leq|n|\leq N}$, unde $(i\lambda_{hn})_{1\leq|n|\leq N}$ sunt valorile proprii ale operatorului diferenţial corespunzător sistemului (24). Cum am menţionat anterior, în acest caz valorile proprii λ_{hn} nu sunt explicite, dar reuşim să arătam că verifică

$$\lambda_{hn} = \frac{2}{h}\sin\frac{n\pi h}{2} + \varepsilon_n \quad \text{cu } 0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{\delta}{\frac{2}{h}\sin\frac{n\pi h}{2}} \quad (1 \leq |n| \leq N). \qquad (29)$$

Şirul $(\widehat{a}_n)_{1\leq|n|\leq N}$ în problema de momente (2) este dat de $\widehat{a}_n = -\frac{\sqrt{2}h\lambda_{hn}}{\varphi_{hN}^{|n|}} a_{hn}^0$, unde $(a_{hn}^0)_{1\leq|n|\leq N}$ sunt coeficienţii Fourier ai datei iniţiale discrete $\begin{pmatrix} U_h^0 \\ U_h^1 \end{pmatrix}$ şi $\varphi_h^{|n|}$ este vector propriu corespunzător valorii proprii $i\lambda_{hn}$. Pentru a obţine relaţia asimptotică (29) pentru valorile proprii λ_{hn} folosim un argument bazat pe metoda tirului şi Teorema lui Rouché. Faptul că nu avem o familie explicită de valori proprii va fi un aspect important şi în construcţia şirului biortogonal care este diferită de cea din [13].

References

[1] B. Allibert, *Analytic controllability of the wave equation over cylinder*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 4 (1999), 177-207.

[2] P. Borwein şi T. Erdelyi, *Generalizations of Müntz's theorem via a Remez-type inequality for Müntz spaces*, J. Amer. Math. Soc., 10 (1997), 327-349.

[3] C. Castro, S. Micu şi A. Munch, *Numerical approximation of the boundary control for the wave equation with mixed finite elements in a square*, IMA Journal of Numerical Analysis, 28 (2008), 186-214.

[4] J. M. Coron, *Control and nonlinearity*, vol. 136 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[5] H. O. Fattorini, *Infinite Dimensional Linear Control Systems. The Time Optimal and Norm Optimal Control Problems*, Elsevier, Amsterdam, 2005.

[6] L. Ignat şi E. Zuazua, *Convergence of a two-grid algorithm for the control of the wave equation*, J. Eur. Math. Soc., 11 (2009), 351-391.

[7] J. A. Infante şi E. Zuazua, *Boundary observability for the space semi-discretization of the 1-D wave equation*, MMAN, 33 (1999), 407-438.

[8] J.-P. Kahane, *Pseudo-périodicité et séries de Fourier lacunaires*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 79 (1962), 93-150.

[9] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization. The multiplier method, RAM: Research in Applied Mathematics*, Masson, Paris, 1994.

[10] G. Lebeau şi L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, Comm. Partial Differential Equations, 20 (1995), 335-356.

[11] L. Leon şi E. Zuazua, *Boundary controllability of the finite-difference space semi-discretizations of the beam equation*, ESAIM Control Optim. Calc. Var, A Tribute to J.–L. Lions, Tome 2 (2002), 827-862.

[12] J.L. Lions, *Contrôle optimal desystèmes gouvernés par des équations aux dérivéespartielles*, Dunod, Paris, 1968.

[13] S. Micu, *Uniform boundary controllability of a semi-discrete 1-D wave equation with vanishing viscosity*, SIAM J. Cont. Optim., 47 (2008), 2857-2885.

[14] S. Micu, *Uniform boundary controllability of a semi–discrete 1–D wave equation*, Numer. Math., 91 (2002), 723-768.

[15] S. Micu, I. Rovenţa şi M. Tucsnak, *Time optimal boundary controls for the heat equation*, Journal of Functional Analysis, 263 (2012), 25-49.

[16] S. Micu, I. Rovenţa şi L. Temereancă, *Approximation of the controls for the linear beam equation*, trimis spre publicare la Mathematics of Control, Signals, and Systems.

[17] S. Micu, I. Rovenţa şi L. Temereancă, *Approximation of the controls for the wave equation with a potential*, în lucru.

[18] S. Micu, şi L. Temereancă, *A time optimal boundary controllability for the heat equation in a ball*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 144 (2014), 1171-1189.

[19] S. Micu şi L. Temereancă, *Controllability of the linear wave equation with a potential*, în lucru.

[20] G. Tenenbaum şi M. Tucsnack, *New blow-up rates for fast controls of Schrödinger and heat equations*, J. Diferential Equations, 243 (2007), 70-100.

[21] M. Tucsnak şi G. Weiss, *Observation and Control for Operator Semigroups*, Birkhäuser Advanced Texts, Springer, Basel, 2009.

[22] E. ZUAZUA, *Exact controllability for semilinear wave equations in one space dimension*, Annales de l'I. H. P., 10 (1993), 109-129.