Universitatea din Craiova
Şcoala Doctorală de Ştiinţe
*Domeniul Matematică*

Teză de doctorat:

# Metode de analiză neliniară în studiul problemelor eliptice

## Rezumat

*Stîrcu Iulia Dorotheea*

Conducător de doctorat:
Prof. Univ. Dr. *Vicenţiu Rădulescu*

Craiova
2018

# Rezumat

Această lucrare este dedicată studiului problemelor neliniare asociate unor operatori eliptici derivabili parţial. Scopul nostru este acela de a studia existenţa soluţiilor slabe ale unor tipuri de ecuaţii eliptice cu derivate parţiale.

Conform lui V. Rădulescu şi D. Repovš în [15], *"Ecuaţiile cu derivate parţiale reprezintă un subiect precis, elegant, bogat şi captivant, care este destul de vechi, cu o istorie amplă şi profundă. Ecuaţiile cu derivate parţiale sunt uimitoare datorită eleganţei şi clarităţii lor."* Prima ecuaţie cu derivată parţială a fost ecuaţia coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

unde $u(x, t)$ reprezintă elongaţia în punctul $x$ şi la momentul $t$, iar constanta pozitivă $a$ semnifică raportul dintre presiunea constantă exercitată asupra coardei şi densitatea ei.

Iniţial, studiul a fost axat pe ecuaţii liniare cu derivate parţiale, precum ecuaţiile lui Laplace, Poisson sau Helmholz. În scurt timp au apărut numeroase rezultate cu privire la problemele eliptice neliniare şi analiza calitativă a soluţiilor acestora.

Ideea de a folosi metode analitice în studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale a venit prima dată de la H. Poincaré [10].

Una dintre ideile principale în căutarea soluţiilor (slabe) ale ecuaţiilor cu derivate parţiale se bazează pe teoria de punct fix. Unei ecuaţii i se poate asocia o funcţională energetică ale cărei puncte critice reprezintă soluţiile ecuaţiei respective. Se pot obţine foarte uşor puncte critice ale unei funcţionale $I$ căutând un minim al lui $I$ care se atinge în limita unui şir de minimizare.

Un alt mod de a găsi puncte critice pentru funcţionala $I$ este *teorema mountain pass* a lui A. Ambrosetti şi P. H. Rabinowitz [1]: dacă funcţionala $I$ este o funcţie de clasă $C^1$ pe un spaţiu Banach $X$, îndeplinind condiţia Palais-Smaile (adică, orice şir $u_n \in X$ astfel încât $I(u_n)$ este mărginită uniform şi $I'(u_n) \to 0$ are un subşir tare convergent în $X$) şi următoarele condiţii geometrice

i) $I(0) = 0$

ii) $I(u) \geq a > 0$, pentru orice $u \in X$ cu $\|u\| = R$

iii) $I(u_0) \leq 0$, pentru oricare $u_0 \in X$ cu $\|u\| > R$

atunci există un punct critic netrivial $v$ al lui $I$ astfel încât $I'(v) = 0$ şi $I(v) \geq a$.

În cele ce urmează vom face o scurtă descriere a acestei teze.

Capitolul 2, *Spaţii de funcţii*, reprezintă o descriere a spaţiilor Lebesgue-Sobolev cu exponent variabil şi a spaţiilor Orlicz-Sobolev care vor fi folosite în studiul mai multor probleme prezentate în capitolele următoare.

Capitolul 3 se bazează pe articolul *Characterization of solutions to equations involving p(x)-Laplace operator* publicat în *Electronic Journal of Differential Equations* (vezi Referinţa [19]). În acest articol stabilim două rezultate. Primul se ocupă cu demonstraţia unei alternative pentru o problemă de valori proprii neliniară care implică operatorul $p(x)$-Laplace. Mai multe idei dezvoltate în studiul spectrului unor operatori generali în forma divergenţă sunt prezentate de Mihăilescu, Rădulescu, Repovš în [6], Molica Bisci, Repovš în [7] şi Stăncuţ, Stîrcu în [16]. În partea a doua studiem un rezultat de existenţă pentru o problemă la limită cu condiţie de creştere subcritică pentru acelaşi operator. Pentru a demonstra primul rezultat folosim lema mountain-pass pe spaţiul $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \times \mathbb{R}$, considerând un hiperplan special destinat separării suprafeţei în locul unei sfere [8, 14]. Obţinerea unui rezultat în cea de-a doua problemă se bazează pe o versiune specială a lemei mountain-pass a lui Ambrosetti-Rabinowitz [9].

Fie $\Omega$ un domeniu mărginit în $\mathbb{R}^N$. În prima parte a acestui capitol ne ocupăm cu studiul problemei neliniare de valori proprii implicând operatorul $p(x)$-Laplace

$$\begin{gathered} -\Delta_{p(x)} u = \lambda f(x,u) \quad \text{în } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{pe } \partial\Omega, \\ 0 < \lambda \le a, \end{gathered} \tag{1}$$

cu constrângeri asupra valorilor proprii, unde $a$ este o constantă pozitivă, $p$ îndeplineşte următoarele proprietăţi:

$$\begin{gathered} p \in C_+(\overline{\Omega}), \\ 1 < p^- \le p(x) \le p^+ < \infty, \\ p \text{ este global log-Hölder continuă} \end{gathered} \tag{2}$$

iar funcţia $f$ satisface următoarele condiţii

(H1) $f$ este o funcţie măsurabilă în $x \in \Omega$ şi continuă în $u \in \mathbb{R}$, cu $f(x,0) \neq 0$ pe o submulţime a lui $\Omega$ (unde $|\Omega| > 0$); atunci, $f$ este o funcţie *Carathéodory*;

(H2) $|f(x,u)| \le c_1 + c_2|u|^{q(x)-1}$ a.p.t. în $\Omega$ şi orice $u \in \mathbb{R}$, unde $c_1$ şi $c_2$ sunt două constante pozitive, $q \in C_+(\overline{\Omega})$ şi $1 < p^- \le p(x) \le p^+ < q^- \le q(x) \le q^+ < p^*(x)$, unde

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)}, & \text{dacă } p(x) < N \\ +\infty, & \text{dacă } p(x) \ge N. \end{cases}$$

(H3) aproape pentru orice $x \in \Omega$ şi orice $u \in \mathbb{R}$, există $b_1 \ge 0$ şi $b_2 \ge 0$ două constante, $\beta$ o funcţie continuă şi $\nu$ o constantă cu $1 \le \beta(x) < p(x) < \nu$ astfel încât

$$f(x,u)u - \nu \int_0^u f(x,t)dt \ge -b_1 - b_2|u|^{\beta(x)}.$$

Atunci este natural să căutăm soluţii pentru acest tip de probleme în spaţiul Sobolev cu exponent variabil.

**Definiţie 1.** *Spunem că* $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *este o* soluţie slabă *pentru problema* (1) *dacă*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx - \lambda\int_\Omega f(x,u)\varphi\, dx = 0, \quad \textit{pentru orice } \varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Rezultatul principal cu privire la problema neliniară de valori proprii (1) este următorul:

**Teoremă 1** ([19])**.** *Presupunem că are loc ipoteza* (2) *iar ipotezele* (H1)–(H3) *sunt îndeplinite de funcţia* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Fie* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie de clasă* $C^1$ *astfel încât, pentru orice constante* $0 < \rho < r$, $\sigma > 0$*, au loc următoarele relaţii:*

*(1)* $\gamma(0) = \gamma(r) = 0$;

*(2)* $\gamma(\rho) = \dfrac{a_1 + a_2}{\sigma + 1}$;

*(3)* $\lim_{|t|\to\infty} \gamma(t) = +\infty$;

*(4)* $\gamma'(t) < 0$ *dacă şi numai dacă* $t < 0$ *sau* $\rho < t < r$.

*Atunci, pentru orice* $a > 0$*, are loc una dintre alternativele:*

*(a) pentru problema* (1), $a > 0$ *este o valoare proprie, cu funcţia proprie corespunzătoare* $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$*, stabilită de relaţia*

$$\alpha \le -\int_\Omega\int_0^{u(x)} f(x,t)\, dt\ dx + \frac{1}{a}\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\, dx \le a_1 + \alpha$$

*sau*

*(b) se poate stabili* $z > 0$ *un număr care satisface*

$$\rho < z < r \tag{3}$$

*şi determină cu ajutorul următoarelor relaţii o soluţie proprie* $(u, \lambda) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \times (0, a]$ *pentru problema* (1)*:*

$$\|u\| = |z|^{-\sigma/q^-}\left(-\gamma'(z)\right)^{1/q^-}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\, dx\right)^{-1/q^-}, \tag{4}$$

$$\lambda^{-1} = z\big(-\gamma'(z)\big)\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\, dx\right)^{-1} + a^{-1}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\alpha &\le z^{\sigma+1}\|u\|^{q^-}\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\, dx + (\sigma+1)\gamma(z)\\ &\quad - \int_\Omega\int_0^{u(x)} f(x,t)\, dt\ dx + \frac{1}{a}\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\, dx \le a_1 + \alpha.\end{aligned} \tag{6}$$

Pentru a demonstra Teorema 1 enunţăm o versiune a Teoremei Mountain-Pass dată de Ambrosetti şi Rabinowitz.

**Lemă 1** ([8])**.** *Fie $X$ un spaţiu Banach şi fie $J \in C^1(X \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ o funcţională care satisface ipotezele:*
*(i) există $\rho > 0$ şi $\alpha > 0$ două constante astfel încât $J(v, \rho) \geq \alpha$, pentru orice $v \in X$;*
*(ii) există $r > \rho$ cu $J(0,0) = J(0,r) = 0$. Atunci avem o valoare critică a lui $J$, notată*

$$c := \inf_{g\in\Gamma} \max_{0\leq\tau\leq 1} J(g(\tau)),$$

*unde*

$$\Gamma = \{g \in (C([0,1]), X) \times \mathbb{R}; g(0) = (0,0), g(1) = (0,r)\}$$

*şi*

$$c \geq \inf_{v\in X} J(v, \rho) \geq \alpha > 0.$$

A doua problemă studiată în Capitolul 3 este următoarea

$$\begin{aligned} -\Delta_{p(x)}u &= \lambda|u|^{p(x)-2}u + |u|^{q(x)-2}u \quad \text{în } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{pe } \partial\Omega, \\ u &\not\equiv 0 \quad \text{în } \Omega, \end{aligned} \tag{7}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N > 3)$ este un domeniu mărginit cu frontiera netedă, $\lambda > 0$ este un număr real, $p, q$ sunt funcţii continue în $\overline{\Omega}$ care satisfac

$$1 < p(x) < q(x) < p^*(x),$$

unde $p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ şi $p(x) < N$, pentru orice $x \in \overline{\Omega}$.

**Definiţie 2.** Spunem că $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ este *soluţie slabă* pentru problema (7) dacă

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p(x)-2}u\varphi\, dx + \int_\Omega |u|^{q(x)-2}u\varphi\, dx,$$

pentru orice $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Urmatoarea teoremă reprezintă rezultatul principal.

**Teoremă 2** ([19])**.** *Dacă $\lambda < \lambda_{P^*}$, unde*

$$\lambda_{P^*} = \inf_{u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\, dx}{\int_\Omega |u|^{p(x)}\, dx},$$
$$1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < q^- \leq q(x) \leq q^+ < p^*(x),$$

*cu $p$ îndeplinind ipoteza* (2)*, atunci există o soluţie slabă pentru problema* (7)*.*

Instrumentul principal folosit în demonstraţia celui de-al doilea rezultat este Teorema Mountain-Pass în următoarea variantă.

**Teoremă 3** ([9]). *Fie $X$ un spaţiu Banach real şi $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ o funcţională care satiface condiţia Palais-Smale. Dacă $F$ satisface următoarele condiţii geometrice*

*(1) există două constante $R, c_0 > 0$ astfel încât $F(u) \geq c_0$, pentru orice $u \in X$ cu $\|u\| = R$,*

*(2) $F(0) < c_0$ şi există $v \in X$ cu $\|v\| > R$ astfel încât $F(v) < c_0$,*

*atunci există cel puţin un punct critic pentru funcţionala $F$.*

Capitolul 4 se bazează pe articolul *Eigenvalue problems for anisotropic equations involving a potential on Orlicz-Sobolev type spaces* publicat în *Opuscula Mathematica* (vezi Referinţa [16]).

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ un domeniu mărginit cu frontiera netedă $\partial\Omega$. Considerăm $a_i : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., N\}$ funcţii astfel încât aplicaţiile $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., N\}$, definite prin

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} a_i(|t|)t, & \text{pentru } t \neq 0, \\ 0, & \text{pentru } t = 0, \end{cases}$$

sunt impare, homeomorfisme crescătoare de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$, $\lambda > 0$ este un număr real, $V(x)$ un potenţial iar $q_1$, $q_2$, $m : \overline{\Omega} \to (2, \infty)$ sunt funcţii continue. Acest capitol este dedicat problemei anizotropice de valori proprii

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \partial_i(\varphi_i(\partial_i u)) + V(x)|u|^{m(x)-2}u = \lambda(|u|^{q_1(x)-2} + |u|^{q_2(x)-2})u & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

unde $V : \Omega \to \mathbb{R}$ satisface $V \in L^{r(x)}(\Omega)$ cu $r(x) \in C(\overline{\Omega})$.

Considerând că operatorul în forma divergenţă este neomogen introducem un spaţiu Orlicz-Sobolev pentru probleme de tipul (8). Mai exact, întrucât problema noastră conţine o ecuaţie de tip anizotropic, căutăm soluţii slabe într-un spaţiu de tip Orlicz-Sobolev mai general, anume spaţiul Orlicz-Sobolev anizotropic. În acelaşi timp, observăm la exponent prezenţa funcţiilor continue $m$, $q_1$ şi $q_2$ care ne conduc la folosirea unui spaţiu potrivit de tip Lebesgue cu exponent variabil.

În acest capitol căutăm soluţii slabe pentru problema (8) într-un subspaţiu al spaţiului anizotropic Orlicz-Sobolev $W_0^1 L_{\vec{\Phi}}(\Omega)$, anume

$$E := \left\{ u \in W_0^1 L_{\vec{\Phi}}(\Omega);\ \int_\Omega |V(x)||u|^{m(x)} dx < \kappa, \text{ cu } \kappa > 0 \text{ constantă reală} \right\}.$$

Definim funcţionalele $J_V, I : E \to \mathbb{R}$ prin

$$J_V(u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \Phi_i(|\partial_i u|) dx + \int_\Omega \frac{V(x)}{m(x)} |u|^{m(x)} dx,$$
$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{q_1(x)} |u|^{q_1(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{q_2(x)} |u|^{q_2(x)} dx.$$

*Funcţionala energetică* corespunzătoare problemei (8) este definită ca fiind $T_\lambda : E \to \mathbb{R}$,

$$T_\lambda(u) = J_V(u) - \lambda I(u).$$

Rezultatele principale ale acestui capitol sunt date de următoarele trei teoreme.

**Teoremă 4** ([16]). *Se presupune că funcţiile* $q_1, q_2, m \in C(\overline{\Omega})$ *satisfac ipotezele*

$$2 < (P^0)_+ < q_2^- \le q_2^+ \le m^- \le m^+ \le q_1^- \le q_1^+ < q_1^+ \cdot r^{-\prime} < (P_0)^*, \tag{9}$$

*unde* $r^{-\prime} = \frac{r^-}{r^- - 1}$. *Atunci orice* $\lambda > 0$ *este o valoare proprie pentru problema* (8).

**Teoremă 5** ([16]). *Se presupune că funcţiile* $q_1, q_2, m \in C(\overline{\Omega})$ *verifică condiţiile*

$$2 < q_2^- \le q_2^+ \le q_1^- \le q_1^+ \le m^- \le m^+ < m^+ \cdot r^{-\prime} < (P_0)_- \le (P_0)^*, \tag{10}$$

*unde* $r^{-\prime} = \frac{r^-}{r^- - 1}$. *Atunci există* $\lambda_* > 0$ *astfel încât orice* $\lambda \in (0, \lambda_*]$ *este o valoare proprie pentru problema* (8).

**Teoremă 6** ([16]). *Se presupune că funcţiile* $q_1, q_2, m \in C(\overline{\Omega})$ *îndeplinesc ipotezele*

$$2 < q_2^- \le q_2^+ \le m^- \le m^+ \le q_1^- \le q_1^+ < q_1^+ \cdot r^{-\prime} < (P_0)_- \le (P_0)^*, \tag{11}$$

*unde* $r^{-\prime} = \frac{r^-}{r^- - 1}$. *Atunci există* $\lambda^* > 0$ *astfel încât orice* $\lambda \in [\lambda^*, \infty)$ *este o valoare proprie pentru problema* (8).

Capitolul 5 se bazează pe articolul *An existence result for a quasilinear degenerate problem in* $\mathbb{R}^N$ publicat în *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* (vezi Referinţa [17]). În acest capitol studiem problema

$$-\mathrm{div}[\phi'(|\nabla u|^2)\nabla u] + a(x)|u|^{\alpha-2}u = |u|^{\gamma-2}u + |u|^{\beta-2}u \text{ în } \mathbb{R}^N (N \ge 3), \tag{12}$$

unde $a$ este un potenţial pozitiv care satisface următoarele ipoteze:

$(a_1)$ $a \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$;

$(a_2)$ $\mathrm{essinf}_{\mathbb{R}^N} a > 0$;

$(a_3)$ $\lim_{x\to 0} a(x) = \lim_{|x|\to\infty} a(x) = +\infty$,

$1 < p < q < N$, $1 < \alpha \le p^* q'/p'$ şi $\max\{\alpha, q\} < \gamma < \beta < p^* = pN/(N-p)$, cu $p'$ şi $q'$ conjugatele exponenţilor, respectiv, $p$ şi $q$.

Presupunem că funcţia $\phi$, care generează operatorul diferenţial în problema (12), satisface următoarele ipoteze:

$(\phi_1)$ $\phi \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$;

$(\phi_2)$ $\phi(0) = 0$;

$(\phi_3)$ există $c_1 > 0$ astfel încât

$$\begin{cases} c_1 t^{p(x)/2} \le \phi(t) \text{ dacă } t \ge 1, \\ c_1 t^{q(x)/2} \le \phi(t) \text{ dacă } 0 \le t \le 1; \end{cases}$$

$(\phi_4)$ există $c_2 > 0$ astfel încât

$$\begin{cases} \phi(t) \le c_2 t^{p(x)/2} \text{ dacă } t \ge 1, \\ \phi(t) \le c_2 t^{q(x)/2} \text{ dacă } 0 \le t \le 1; \end{cases}$$

$(\phi_5)$ există $0 < \mu < 1$ astfel încât $2t\phi^{'}(t) \le \gamma\mu\phi(t)$ pentru orice $t \ge 0$;

$(\phi_6)$ aplicaţia $t \longmapsto \phi(t^2)$ este strict convexă.

Scopul nostru este să demonstrăm, cu ajutorul teoremei mountain pass (vezi [11, 12, 13]), că problema (12) admite cel putin o soluţie slabă.

Acum, definim spaţiul de funcţii $L^p(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N)$ ca fiind închiderea spaţiului $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ în norma

$$\|u\|_{L^p+L^q} := \inf\left\{\|v\|_p + \|w\|_q\,; v \in L^p(\mathbb{R}^N), w \in L^q(\mathbb{R}^N), u = v + w\right\}. \tag{13}$$

Fixăm $\|u\|_{p,q} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)+L^q(\mathbb{R}^N)}$.

Proprietatea că $L^p(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N)$ sunt spaţii Orlicz, precum şi alte proprietăţi ale acestor spaţii, au fost demonstrate de M. Badiale, L. Pisani şi S. Rolando în [5].

Cu scopul de a folosi aceste proprietăţi în capitolul de faţă, enunţăm următoarele rezultate care se găsesc şi în [4]:

**Propoziţie 1.** *Fie $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $u \in L^p(\Omega) + L^q(\Omega)$. Avem:*

*(i) dacă $\Omega^{'} \subset \Omega$ astfel încât $|\Omega^{'}| < +\infty$, atunci $u \in L^p(\Omega^{'})$;*

*(ii) dacă $\Omega^{'} \subset \Omega$ astfel încât $u \in L^\infty(\Omega^{'})$, atunci $u \in L^q(\Omega^{'})$;*

*(iii) $|[|u(x) > 1|]| < +\infty$;*

*(iv) $u \in L^p([|u(x)| > 1]) \cap L^q([|u(x)| \le 1])$;*

*(v) infimumul din (13) este atins;*

*(vi) $L^p(\Omega) + L^q(\Omega)$ este reflexiv şi $(L^p(\Omega) + L^q(\Omega))^{'} = L^{p^{'}}(\Omega) \cap L^{q^{'}}(\Omega)$;*

*(vii) $\|u\|_{L^p(\Omega)+L^q(\Omega)} \le \max\left\{\|u\|_{L^p([|u(x)|>1])}, \|u\|_{L^q([|u(x)|\le 1])}\right\}$;*

*(viii) dacă $B \in \Omega$, atunci $\|u\|_{L^p(\Omega)+L^q(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(B)+L^q(B)} + \|u\|_{L^p(\Omega\setminus B)+L^q(\Omega\setminus B)}$.*

În sfârşit, definim spaţiul de funcţii

$$X := \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|},$$

unde

$$\|u\| = \|\nabla u\|_{p,q} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^\alpha dx\right)^{1/\alpha}.$$

Observăm că $X$ se scufundă continuu în $W$ definit de Azzollini în [4], unde

$$W := \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|},$$

$$\|u\| = \|\nabla u\|_{p,q} + \|u\|_\alpha.$$

**Definiţie 3.** *O soluţie slabă pentru problema* (12) *este o funcţie* $u \in X \setminus \{0\}$ *astfel încât*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\phi^{'}(|\nabla u|^2)(\nabla u \cdot \nabla v) + a(x)|u|^{\alpha-2}uv - |u|^{\gamma-2}uv - |u|^{\beta-2}uv\right] dx = 0,$$

*pentru orice* $v \in X$.

Definim funcţionala energetică $I : X \to \mathbb{R}$ prin

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|\nabla u|^2)dx + \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^{\alpha}dx - \frac{1}{\gamma}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\gamma}dx - \frac{1}{\beta}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta}dx.$$

Acum, vom enunţa o versiune a lemei mountain-pass a lui A. Ambrosetti şi P. Rabinowitz [2] (vezi şi [3]).

**Lemă 2.** *Fie* $X$ *un spaţiu Banach, cu presupunerea că* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ *satisface următoarele condiţii geometrice:*

$(a)$ $I(0) = 0$;

$(b)$ *există două numere pozitive* $a$ *şi* $r$ *astfel încât* $I(u) \geq a$ *pentru orice* $u \in X$ *cu* $\|u\| = r$;

$(c)$ *există* $e \in X$ *cu* $\|e\| > r$ *astfel încât* $I(e) < 0$.

*Fie*

$$P := \{p \in C([0,1]; X); p(0) = 0, p(1) = e\}$$

*şi*

$$c := \inf_{p \in P} \sup_{t \in [0,1]} I(p(t)).$$

*Atunci există un şir* $(u_n) \subset X$ *astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c \text{ şi } \lim_{n\to\infty} \left\|I^{'}(u_n)\right\|_{X^*} = 0.$$

*Mai mult, dacă* $I$ *satisface condiţia Palais-Smale în punctul* $c$, *atunci* $c$ *este o valoare critică pentru* $I$.

În sfârşit, rezultatul principal al acestui capitol este dat de următoarea teoremă.

**Teoremă 7** ([17])**.** *Se presupune că* $1 < p < q < N$, $1 < \alpha \leq p^* q^{'}/p^{'}$, $\max\{\alpha, q\} < \gamma < \beta < p^*$, $(a_1) - (a_3)$ *şi* $(\phi_1) - (\phi_6)$ *sunt îndeplinite. Atunci problema* (12) *are cel puţin o soluţie slabă.*

Capitolul 6 se bazează pe articolul *An existence result for quasilinear elliptic equations with variable exponents* publicat în *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series* (vezi Referinţa [18]). Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ un domeniu mărginit cu frontiera netedă. Fie $\lambda$ un parametru real pozitiv, $p, r, s$ funcţii continue în $\overline{\Omega}$ care satisfac condiţia

$$2 \leq p(x) < r(x) < s(x) < p^*(x), \tag{14}$$

unde $p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ şi $p(x) < N$ pentru orice $x \in \overline{\Omega}$.

În acest capitol studiem o ecuaţie eliptică neliniară de tipul $p(x)$-Laplace

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\phi(x,|\nabla u|)\nabla u)+|u|^{p(x)-2}u=\lambda|u|^{r(x)-2}u-h(x)|u|^{s(x)-2}u & \text{în} \quad \Omega, \\ u=0 & \text{pe} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{15}$$

unde $\phi(x,t)$ este de tipul $|t|^{p(x)-2}$ satisfăcând următoarele ipoteze:

$(h1)$ $\phi:\Omega\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ îndeplineşte următoarele condiţii: $\phi(\cdot,\omega)$ este o funcţie măsurabilă în $\Omega$ pentru orice $\omega>0$ şi $\phi(x,\cdot)$ este local absolut continuă în $[0,\infty)$ pentru aproape orice $x\in\Omega$;

$(h2)$ Fie $a\in L^{p'(x)}(\Omega)$ o funcţie şi $b$ o constantă nenegativă astfel încât

$$|\phi(x,|v|)v|\leq a(x)+b|v|^{p(x)-1}, \forall x\in\Omega, \forall v\in\mathbb{R}^N;$$

$(h3)$ Există $c>0$ o constantă astfel încât, pentru aproape orice $x\in\Omega$, este îndeplinită următoarea condiţie:

$$\phi(x,\omega)\geq c\omega^{p(x)-2}, \text{ pentru aproape orice } \omega>0,$$

cu funcţia continuă $p:\overline{\Omega}\to(1,\infty)$ şi $h:\overline{\Omega}\to[0,\infty)$ este o funcţie continuă care satisface următoarele ipoteze:

$$\left(\frac{\lambda^{s(x)}}{h(x)^{r(x)}}\right)^{\frac{1}{s(x)-r(x)}}\in L^1(\Omega), \tag{16}$$

$$\left(\frac{\lambda^{s(x)-2}}{h(x)^{r(x)-2}}\right)^{\frac{1}{s(x)-r(x)}}\in L^{\frac{s(\cdot)}{s(\cdot)-2}}(\Omega). \tag{17}$$

Scopul acestui capitol este de a stabili, cu condiţii potrivite asupra lui $\phi$, că pentru $\lambda$ suficient de mare există cel puţin două soluţii slabe netriviale. Pentru a demonstra acest rezultat, folosim o versiune specială a teoremei mountain pass (vezi [1] şi [20, Theorem 1.15]) şi o metodă variaţională corespunzătoare.

Pe parcursul acestui capitol, căutăm soluţii slabe pentru problema (15) într-un subspaţiu al lui $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, mai exact în *spaţiul Sobolev cu exponent variabil de tip ponderat* definit prin

$$X=\left\{u\in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega); \int_\Omega h(x)|u|^{s(x)}dx<\infty\right\}$$

înzestrat cu norma

$$\|u\|_X=|u|_{p(\cdot)}+|\nabla u|_{p(\cdot)}+|u|_{h,s(\cdot)}.$$

**Definiţie 4.** *Numim soluţie slabă pentru problema* (15) *o funcţie $u\in X$ care satisface*

$$\int_\Omega\left(\phi(x,|\nabla u|)\nabla u\nabla\varphi+|u|^{p(x)-2}u\varphi\right)dx=\lambda\int_\Omega|u|^{r(x)-2}u\varphi dx-\int_\Omega h(x)|u|^{s(x)-2}u\varphi dx,$$

*pentru orice $\varphi\in X$.*

Definim *funcţionala energetică* $I : X \to \mathbb{R}$ prin

$$I(u) = \int_\Omega \Phi(x, |\nabla u|)dx + \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}dx - \lambda \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{r(x)}dx + \int_\Omega \frac{h(x)}{r(x)}|u|^{s(x)}dx,$$

unde

$$\Phi(x,t) = \int_0^t \phi(x,\omega)\omega d\omega.$$

În sfârşit, enunţăm rezultatul principal.

**Teoremă 8** ([18]). *Există $\lambda_* > 0$ astfel încât pentru $\lambda > \lambda_*$ problema* (15) *are cel puţin două soluţii slabe netriviale.*

În capitolul 7 studiem următoarea problemă de valori proprii

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,[a(x)(\phi(x,|\nabla u|)\nabla u + \psi(x,|\nabla u|)\nabla u)] = \lambda |u|^{q(x)-2}u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{18}$$

unde $\Omega \in \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ este un domeniu mărginit cu frontiera netedă, $\lambda$ este un număr real pozitiv, $a : \Omega \to [0,\infty)$ o funcţie ponderată cu proprietatea că $a \in L^1_{loc}(\Omega)$ şi $p_1, p_2, q \in C_+(\bar{\Omega})$ satisfăcând

$$1 < p_1(x) < q^- \leq q^+ < p_2(x) < p_1^*(x), \tag{19}$$

unde $p_1^*(x) := \dfrac{Np_1(x)}{N - p_1(x)}$ dacă $p_1(x) < N$ şi $p_1^*(x) := +\infty$ dacă $p_1(x) > N$.

Problema (18) se bazează pe un operator neomogen de tipul $(\phi(x,|\nabla u|)\nabla u)$. Când $\phi(x,\mu) = \mu^{p(x)-2}$, operatorul implicat în (18) este operatorul $p(x)$-Laplace, adică,

$$\Delta_{p(x)}u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u).$$

Considerăm funcţiile $\phi, \psi : \Omega \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ care îndeplinesc următoarele ipoteze:

$(h_1)$ $\phi(\cdot,\mu)$ şi $\psi(\cdot,\mu)$ sunt două aplicaţii măsurabile pe $\Omega$ pentru orice $\mu \geq 0$; în plus, $\phi(x,\cdot)$ şi $\psi(x,\cdot)$ sunt local absolut continue pe $[0,\infty)$ pentru aproape orice $x \in \Omega$;

$(h_2)$ există $\alpha_1 \in L^{p_1'}(\Omega)$, $\alpha_2 \in L^{p_2'}(\Omega)$ funcţii şi $\beta > 0$ astfel încât

$$|\phi(x,|v|)v| \leq \alpha_1(x) + \beta|v|^{p_1(x)-1}, \;\; |\psi(x,|v|)v| \leq \alpha_2(x) + \beta|v|^{p_2(x)-1}$$

pentru aproape orice $x \in \Omega$ şi pentru orice $v \in \mathbb{R}^N$.

$(h_3)$ există o constantă pozitivă $c > 0$ astfel încât

$$\phi(x,\mu) \geq c\mu^{p_1(x)-2}, \;\; \phi(x,\mu) + \mu\frac{\partial\phi}{\partial\mu}(x,\mu) \geq c\mu^{p_1(x)-2}$$

şi

$$\psi(x,\mu) \geq c\mu^{p_2(x)-2}, \;\; \psi(x,\mu) + \mu\frac{\partial\psi}{\partial\mu}(x,\mu) \geq c\mu^{p_2(x)-2},$$

pentru aproape orice $x \in \Omega$ şi pentru orice constantă $\mu$ pozitivă.

**Definiţie 5.** *O soluţie slabă pentru problema* (18) *este o funcţie* $u \in D_0^{1,p_2(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ *astfel încât*

$$\int_\Omega a(x)\left[\phi(x,|\nabla u|)+\psi(x,|\nabla u|)\right]\nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{q(x)-2} uv dx = 0,$$

*pentru orice* $v \in D_0^{1,p_2(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$.

Spaţiul funcţiilor pentru problema (18) este $D_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$, această alegere fiind motivată de ipoteza (19) şi de prezenţa unei funcţii ponderate $a : \Omega \to [0,\infty)$ care satisface $a \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Pentru orice $\lambda > 0$ definim $F_\lambda : D_0^{1,p_2(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ prin

$$F_\lambda(u) = \int_\Omega \frac{a(x)}{p_1(x)}|\nabla u|^{p_1(x)}dx + \int_\Omega \frac{a(x)}{p_2(x)}|\nabla u|^{p_2(x)}dx - \lambda \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx.$$

Atunci, $F_\lambda \in C^1(D_0^{1,p_2(x)}(\Omega),\mathbb{R})$ şi

$$\left\langle F'_\lambda(u), v\right\rangle = \int_\Omega a(x)\left[\phi(x,|\nabla u|)+\psi(x,|\nabla u|)\right]\nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{q(x)-2} uv dx,$$

pentru orice $u, v \in D_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$.

Definim *primul coeficient Rayleigh* prin

$$\lambda_1 := \inf_{u \in D_0^{1,p_2(x)}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \frac{a(x)}{p_1(x)}|\nabla u|^{p_1(x)}dx + \int_\Omega \frac{a(x)}{p_2(x)}|\nabla u|^{p_2(x)}dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx}.$$

Rezultatul principal al acestui capitol este dat de următoarea teoremă.

**Teoremă 9.** *Se presupune că ipoteza* (19) *este îndeplinită. Atunci* $\lambda_1 > 0$. *Mai mult, orice* $\lambda \in [\lambda_1, \infty)$ *este o valoare proprie pentru problema* (18). *În plus, există o constantă pozitivă* $\lambda_0$ *astfel încât* $\lambda_0 \le \lambda_1$ *şi nici o valoare* $\lambda \in (0, \lambda_0)$ *nu este valoare proprie pentru problema* (18).

# Bibliography


[1] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory, *J. Funct. Anal.* **14** (1973), 349–381.

[2] J. Chabrowski, Y. Fu, Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian problems on a bounded domain, *J. Math. Anal. Appl.*, **306** (2005), 604–618.

[3] N. Chorfi and V. D. Rădulescu, Standing waves solutions of a quasilinear degenerate Schrödinger equation with unbounded potential, *Electronic Journal of the Qualitative Theory of Differential Equations* **37** (2016), 1–12.

[4] X. Fan, Q. Zhang, Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems, *Nonlinear Anal.*, **52** (2003), 1843–1852.

[5] X. Fan, Q. Zhang, D. Zhao, Eigenvalues of $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **302** (2005), 306–317.

[6] M. Mihăilescu, V. Rădulescu, D. Repovš, On a non-homogeneous eigenvalue problem involving a potential: an Orlicz-Sobolev space setting, *J. Math. Pures Appl.*, (9) **93** (2010), no. 2, 132–148.

[7] G. Molica Bisci, D. Repovš, Multiple solutions for elliptic equations involving a general operator in divergence form, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **39** (2014), no. 1, 259–273.

[8] D. Motreanu, A new approach in studying one parameter nonlinear eigenvalue problems with constraints, *Nonlinear Anal.*, **60** (2005), No. 3, 443–463.

[9] D. Motreanu, V. Rădulescu, Existence theorems for some classes of boundary value problems involving the $p$-Laplacian, *PanAmerican Math. Journal*, **7** (1997), No. 2, 53–66.

[10] H. Poincaré, Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique, *Amer. J. Math* **12** (1890), 211–294.

[11] P. Pucci, V. Rădulescu, The impact of the mountain pass theory in nonlinear analysis: a mathematical survey, *Boll. Un. Ital. B*, Ser IX, **III** (2010), 543–582.

[12] P. Pucci, J. Serrin, Extensions of the mountain pass theorem, *J. Funct. Anal.* **59** (1984), 185–210.

[13] P.Pucci, J. Serrin, A mountain pass theorem, *J. Differential Equations* **60** (1985), 142–149.

[14] P. H. Rabinowitz, Minmax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations, *CBMS Reg. Conf. Ser. Math* **65**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1986.

[15] V. Rădulescu, D. Repovš, *Partial Differential Equations with Variable Exponents: Variational Methods and Qualitative Analysis*, CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton FL, 320, pp. 2015.

[16] I. Stăncuţ, I. Stîrcu, Eigenvalue problems for anisotropic equations involving a potential on Orlicz-Sobolev type spaces, *Opuscula Math.*, **36** (2016), no. 1, 81–101.

[17] I. Stîrcu, An existence result for a quasilinear degenerate problem in $\mathbb{R}^N$, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2017, No. 5, 1–11.

[18] I. Stîrcu, An existence result for quasilinear elliptic equations with variable exponents, *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, **44**(2), 2017, 299–315.

[19] I. Stîrcu, V. Uţă, Characterization of solutions to equations involving the $p(x)$-Laplace operator, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. **2017** (2017), No. 273, pp. 1–16.

[20] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, Boston (1996).