Universitatea din Craiova

Şcoala Doctorală de Ştiinţe

Domeniul Matematică

Rezumat teză de doctorat:

A Variational Analysis of Some Classes of Integral and Differential Equations: Eigenvalue Problems and Torsional Creep Problems

Maria Fărcăşeanu

Conducător de doctorat:
Prof. Univ. Dr. *Mihai Mihăilescu*

Craiova
2018

1 Introducere

O ecuaţie cu derivate parţiale (EDP) este o ecuaţie ce implică o funcţie necunoscută de două sau mai multe variabile şi, cu siguranţă, derivatele sale parţiale. Ecuaţiile cu derivate parţiale apar frecvent în toate domeniile, ca de exemplu în fizică, mecanică sau inginerie. De fapt, oriunde avem o interacţiune între nişte variabile independente, putem defini funcţii utilizând aceste variabile şi putem descrie o multitudine de procese, dezvoltând ecuaţii pentru aceste funcţii. În consecinţă, din cauza varietăţii de fenomene ce pot fi modelate de ecuaţiile cu derivate parţiale, nu există o teorie generală privind rezolvarea lor.

Există mai multe metode de a rezolva ecuaţiile cu derivate parţiale, fiecare metodă putând fi aplicată unei anumite clase de ecuaţii. A rezolva o EDP depinde în mare parte de structura sa iniţială. Se consideră că o problemă dată este "bine-pusă" dacă are o unică soluţie stabilă (i.e. soluţia depinde continuu de datele problemei). Există mai multe moduri de a defini o soluţie a unei EDP. Cea mai naturală definiţie este următoarea: atunci când toate derivatele ce apar în problemă există şi sunt continue, deşi derivatele de ordin mai mare pot să nu existe. Astfel de soluţii se numesc "soluţii clasice". Pe de altă parte, există funcţii pentru care este posibil să nu existe toate derivatele, dar care satisfac ecuaţia într-un anumit sens definit. Astfel de funcţii sunt cunoscute în literatură ca "soluţii slabe" şi sunt cele mai utilizate în analiza ecuaţiilor cu derivate parţiale. Uneori, este mai convenabil să demonstrăm existenţa soluţiilor definite în sens slab şi apoi să arătăm că aceste soluţii sunt de fapt soluţii clasice.

În general, soluţiile definite în sens slab pot fi găsite ca puncte critice ale funcţionalelor variaţionale ataşate problemei respective, definite pe un spaţiu de funcţii adecvat. Cel mai uşor mod de a obţine un astfel de punct critic este a căuta un punct de extrem, care în majoritatea cazurilor este un punct de minim global. Dacă funcţionala are proprietăţi bune, ca de exemplu netezimea sau mărginirea, existenţa punctelor de minim poate fi obţinută prin aplicarea metodelor directe în calculul variaţional. Altfel, de exemplu, dacă funcţionala nu e suficient de netedă, problema poate fi reformulată ca o inegalitate variaţională, sau dacă funcţionala nu este mărginită, există anumite tehnici de minimizare ce pot fi folosite, prin constrângerea funcţionalei pe o mulţime unde este mărginită inferior. Astfel de tehnici de minimizare sunt de exemplu minimizarea pe sfere sau pe varietatea Nehari.

Unele dintre problemele fundamentale în fizica matematică sunt, probabil, problemele de valori proprii pentru ecuaţiile cu derivate parţiale eliptice. Analiza unor astfel de ecuaţii implică, în general, metode energetice ce se bazează pe teoria punctului critic menţionată anterior. De exemplu, problema de valori proprii asociată operatorului $p-$Laplacian cu condiţie de tip Dirichlet omogenă pe frontiera domeniului, i.e.

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{1}$$

unde Ω este un domeniu mărginit în $\mathbb{R}^N$, $p \in (1, \infty)$ şi $\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ reprezintă operatorul $p-$Laplacian, a fost intens studiată de-a lungul timpului si au fost obţinute multe rezultate interesante.

Dacă $p = 2$, problema (1) devine problema de valori proprii pentru operatorul Laplacian,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \,, \end{cases}$$

şi este bine cunoscut faptul că toate valorile sale proprii sunt pozitive şi formează un şir crescător şi nemărginit $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$ astfel încât $\lambda_n \to +\infty$ când $n \to \infty$. Mai mult, în acest caz particular, toate valorile proprii au multiplicitate finită şi prima valoare proprie este simplă. Pentru $p \neq 2$ şi $N \geq 2$, descrierea completă a mulţimii valorilor proprii este o problemă deschisă. Se ştie că teoria Ljusternik-Schnirelman asigură existenţa unui şir infinit de valori proprii pozitive ale problemei (1), dar în general această teorie nu dă toate valorile proprii. Prima valoare proprie (i.e. cea mai mică) a problemei (1), $\lambda_1(p)$, poate fi caracterizată din punct de vedere variaţional astfel

$$\lambda_1(p) := \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx}.$$

Valoarea proprie $\lambda_1(p)$ este simplă, izolată şi funcţiile proprii asociate nu schimbă semnul în Ω. De asemenea, dacă $u_p > 0$ este o funcţie proprie asociată valorii proprii $\lambda_1(p)$, atunci şirul $\{u_p\}$ conţine un subşir, ce converge uniform în Ω, când $p \to \infty$, la o soluţie netrivială şi nenegativă definită în sens de viscozitate a problemei limită

$$\begin{cases} \min\{|\nabla u| - \Lambda_\infty u, -\Delta_\infty u\} = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \,, \end{cases}$$

unde Δ_∞ reprezintă operatorul $\infty-$Laplacian, care pentru funcţii $u : \Omega \to \mathbb{R}$ suficient de netede este definit astfel $\Delta_\infty u := \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \langle D^2 u \nabla u, \nabla u \rangle$ şi

$$\Lambda_\infty := \frac{1}{\max\limits_{x \in \Omega} dist(x, \partial\Omega)}.$$

Rezultatele de mai sus, obţinute în cazul operatorului p-Laplacian, reprezintă motivul pentru care prima parte a tezei (Capitolul 2) este dedicată studierii unor probleme de valori proprii, asociate unor operatori eliptici diferenţiali sau integrali. De exemplu, considerăm o versiune anisotropică a p-Laplacianului şi anume, operatorul $(p, q)-$Laplacian anisotropic, definit astfel

$$\Delta_{p,q} u := \text{div}_x \left(|\nabla_x u|^{p-2} \nabla_x u \right) + \text{div}_y \left(|\nabla_y u|^{q-2} \nabla_y u \right) \,,$$

unde $\nabla_x u$ şi $\nabla_y u$ reprezintă derivatele lui u în raport cu primele L variabile şi în raport cu ultimele M variabile $(L + M = N)$ şi o versiune fracţională a $p-$Laplacianului, operatorul $(s, p)-$Laplacian fracţional, definit de

$$(-\Delta_p)^s u(x) := 2 \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} \, dy, \; x \in \mathbb{R}^N \,,$$

unde $1 < p < \infty$ şi $0 < s < 1$. Fiecăruia dintre aceşti operatori, îi asociem o problemă de valori proprii adecvată şi descriem spectrul său utilizând metode bazate pe teoria punctului critic. Pe lângă acestea, în acest capitol, studiem continuitatea primei valori proprii în raport cu un parametru, pentru o familie de valori proprii degenerată şi la sfârşit enunţăm un principiu de maxim pentru o clasă de operatori diferenţiali de prim ordin, folosind ca punct de plecare o problemă de valori proprii pentru operatori eliptici ce implică prezenţa unor exponenţi variabili.

A doua parte a tezei (Capitolul 3) este dedicată studierii unor ecuaţii cu derivate parţiale asociate cu conceptul de "torsional creep". Acest fenomen este explicat ca fiind deformarea plastică permanentă a unui material supus unui moment de torsiune pentru o perioadă îndelungată de timp şi la o temperatură ridicată. Modelarea unui astfel de fenomen este legată de probleme neomogene de tipul

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 1 & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{2}$$

unde $p \to \infty$. Este cunoscut faptul că problema (2) are o unică soluţie, u_p, ce converge uniform la funcţia $\mathrm{dist}(\cdot, \partial\Omega)$ (funcţia distanţă la frontiera domeniului Ω), când $p \to \infty$. Cazul limită este deosebit de important în aplicaţii deoarece modelează torsiunea plastică perfectă. În acest capitol, scopul nostru va fi să studiem comportamentul asimptotic al unor familii de soluţii pentru diferite ecuaţii, ce reprezintă extensii ale problemei clasice de torsional creep (2).

2 Rezultate principale

Teza este structurată în 3 capitole (Capitolele 2-4). Capitolele 2 şi 3 reprezintă partea principală a tezei, conţinând ecuaţiile cu derivate parţiale studiate în acord cu motivaţiile descrise anterior. Capitolul 4 conţine câteva probleme deschise din literatură pe topicul tezei. În continuare, descriem pe scurt rezultatele principale din teză.

Pe parcursul tezei considerăm că Ω este un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^N$ cu frontiera netedă $\partial\Omega$. De asemenea, în continuare, prin soluţie a unei ecuaţii vom înţelege o soluţie definită în sens slab.

Capitolul 2 este dedicat studierii unor probleme de valori proprii asociate unor diferite tipuri de operatori diferenţiali sau integrali. În acest capitol, λ este un parametru real, ce va fi numit valoare proprie a unei probleme dacă problema respectivă are o soluţie netrivială definită în sens variaţional. Acest capitol cuprinde 4 secţiuni (Secţiunile 2.1-2.4).

Secţiunea 2.1 (bazată pe lucrarea [1]) este dedicată studierii unei probleme de valori proprii asociată unui operator (p, q)-Laplacian anisotropic. Mai exact, dacă L şi M sunt două numere întregi pozitive astfel încât $L + M = N$, atunci pentru două numere reale p şi q, ce satisfac $1 < p < q < \infty$, şi fiecare funcţie netedă $u : \Omega \to \mathbb{R}$, definim operatorul (p, q)-*Laplacian anisotropic* astfel

$$\Delta_{p,q} u := \mathrm{div}_x \left(|\nabla_x u|^{p-2} \nabla_x u \right) + \mathrm{div}_y \left(|\nabla_y u|^{q-2} \nabla_y u \right) \,,$$

unde prin $\nabla_x u$ şi $\nabla_y u$ am notat derivatele lui u în raport cu primele L variabile respectiv, în raport cu ultimele M variabile,

$$\nabla_x u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_L} \right) \quad \text{and} \quad \nabla_y u = \left(\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial y_M} \right) \,.$$

În această secţiune, studiem existenţa soluţiilor netriviale ale următoarei probleme de valori proprii anisotropice

$$\begin{cases} -\Delta_{p,q} u = \lambda |u|^{q-2}u, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3}$$

Rezultatul principal al acestei secţiuni este următorul (corespunzător Teoremei 2.1 din teză):

Theorem 1. *Presupunem că $1 < p < q < \infty$ şi sau $p \geq N$ sau*

$$\frac{L}{p} + \frac{M}{q} > 1 \quad \text{and} \quad \frac{L}{p} - \frac{L}{q} < 1\,.$$

Atunci mulţimea valorilor proprii a problemei (3) este dată exact de intervalul deschis $(\mu_1(q), \infty)$, unde

$$\mu_1(q) := \inf_{u \in W_0^{1,p,q}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla_y u|^q}{\displaystyle\int_\Omega |u|^q}\,.$$

În secţiunea 2.2 (bazată pe lucrările [2] şi [6]), studiem două probleme de valori proprii asociate unui operator integral. Această secţiune este împărţită în două subsecţiuni: 2.2.1 şi 2.2.2. Pentru a prezenta rezultatele principale din aceste subsecţiuni, definim pentru fiecare $p \in (1, \infty)$ şi $s \in (0, 1)$, operatorul (s, p)-*Laplacian fracţional* astfel

$$(-\Delta_p)^s u(x) := 2 \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{|x-y| \geq \epsilon} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}}\, dy, \;\; x \in \mathbb{R}^N\,.$$

Problema clasică de valori proprii asociată operatorului (s, p)-Laplacian fracţional este dată de

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u(x) = \lambda |u(x)|^{p-2}u(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & \text{for } x \in \mathbb{R}^N\setminus\Omega\,. \end{cases} \tag{4}$$

Prima valoare proprie a problemei (4), notată $\lambda_1(s, p)$, poate fi caracterizată din punct de vedere variaţional astfel:

$$\lambda_1(s, p) := \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}}\, dx\, dy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\, dx}\,. \tag{5}$$

În subsecţiunea 2.2.1, analizăm problema

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u(x) = \lambda f(x, u(x)), & \text{for } x \in \Omega \\ u(x) = 0, & \text{for } x \in \mathbb{R}^N\setminus\Omega\,, \end{cases} \tag{6}$$

unde funcţia $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată de

$$f(x, t) = \begin{cases} h(x, t), & \text{if } t \geq 0, \\ |t|^{p-2}t, & \text{if } t < 0\,. \end{cases} \tag{7}$$

Funcţia $h : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ este o funcţie Caratheodory, ce satisface următoarele ipoteze:

(H1) există o constantă pozitivă $C \in (0,1)$ astfel încât $|h(x,t)| \leq Ct^{p-1}$, pentru orice $t \geq 0$ şi a.p.t $x \in \Omega$;

(H2) există $t_0 > 0$, astfel încât $H(x,t_0) = \int_0^{t_0} h(x,s)\, ds > 0$ pentru a.p.t $x \in \Omega$;

(H3) $\lim_{t\to\infty} \frac{h(x,t)}{t^{p-1}} = 0$, uniform în Ω.

Rezultatul principal al acestei subsecţiuni este dat de următoarea teoremă (corespunzătoare Teoremei 2.2 din teză):

Theorem 2. *Presupunem că f este dată de relaţia (7) şi condiţiile (H1), (H2) şi (H3) sunt satisfăcute. Atunci, $\lambda_1(s,p)$ definită în (5), este o valoare proprie izolată a ecuaţiei (6). Mai mult, orice $\lambda \in (0, \lambda_1(s,p))$ nu este valoare proprie a problemei (6), dar există $\mu_1 > \lambda_1(s,p)$, astfel încât $\lambda \in (\mu_1, \infty)$ este o valoare proprie a problemei (6).*

În subsecţiunea 2.2.2, studiem următoarea problemă de valori proprii perturbată:

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u(x) + (-\Delta_q)^t u(x) = \lambda |u(x)|^{r-2} u(x), & \text{for } x \in \Omega \\ u(x) = 0, & \text{for } x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega\,, \end{cases} \tag{8}$$

unde s, t, p şi q sunt numere reale ce satisfac ipoteza

$$0 < t < s < 1, \quad 1 < p < q < \infty, \quad s - \frac{N}{p} = t - \frac{N}{q}\,, \tag{9}$$

şi $r \in \{p, q\}$. Scopul nostru va fi să determinăm mulţimea parametrilor λ, pentru care problema (8) are soluţii slabe netriviale. În acest scop, definim

$$\lambda_1 := \begin{cases} \lambda_1(s,p) := \inf\limits_{u \in C_0^\infty(\Omega)\setminus\{0\}} \dfrac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\, dx\, dy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\, dx}, & \text{if } \; r = p \\[2ex] \lambda_1(t,q) := \inf\limits_{u \in C_0^\infty(\Omega)\setminus\{0\}} \dfrac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^q}{|x-y|^{N+tq}}\, dx\, dy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q\, dx}, & \text{if } \; r = q\,. \end{cases}$$

Rezultatul principal asupra problemei (8) este următorul (corespunzător Teoremei 2.3 din teză):

Theorem 3. *Presupunem condiţia (9) îndeplinită. Atunci mulţimea parametrilor λ pentru care problema (8) are cel puţin o soluţie slabă netrivială este dată de intervalul deschis (λ_1, ∞), cu λ_1 definită anterior. Mai mult, soluţiile slabe pot fi alese să fie nenegative.*

În secţiunea 2.3 (bazată pe lucrarea [3]), pentru fiecare $\alpha \in [0,2)$, considerăm problema de valori proprii

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|x|^\alpha \nabla u) = \lambda u, & \text{for } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{for } x \in \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{10}$$

unde $0 \in \Omega$ şi câtul Rayleigh corespunzător ecuaţiei, şi anume:

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^2 \, dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2 \, dx}.$$

Infimumul câtului anterior considerat după toate funcţiile netede ce iau valoarea zero pe frontieră, i.e.

$$\lambda_1(\alpha) := \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^2 \, dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2 \, dx},$$

este pozitiv şi reprezintă prima valoare proprie a problemei (10). Astfel, putem defini funcţia $\lambda_1 : [0, 2) \to (0, \infty)$. Rezultatul principal al acestei secţiuni este dat de următoarea teoremă (corespunzătoare Teoremei 2.4 din teză):

Theorem 4. *Funcţia* $\lambda_1 : [0, 2) \to (0, \infty)$ *este continuă.*

Scopul secţiunii 2.4 (bazată pe lucrarea [5]) este de a prezenta cum o serie de rezultate obţinute pentru o problemă de valori proprii cu exponenţi variabili, pot fi folosite pentru a obţine un principiu de maxim, ce completează principiul de maxim clasic pentru operatori eliptici. Teorema principală din această secţiune este următoarea (corespunzătoare Teoremei 2.7 din teză):

Theorem 5. *Fie* $\overrightarrow{a} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *o funcţie vectorială astfel încât* $\overrightarrow{a} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. *Presupunem că există o constantă pozitivă* $a_0 > 0$ *aşa încât*

$$\operatorname{div} \overrightarrow{a}(x) \geq a_0 > 0, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{11}$$

Dacă $p \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *este o soluţie a inegalităţii diferenţiale*

$$\overrightarrow{a}(x) \cdot \nabla p(x) \leq 0, \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{12}$$

atunci pentru fiecare mulţime deschisă $U \subset \Omega$, *minimul funcţiei* p *în* $\overline{U}$ *este atins pe* ∂U.

Dacă $p \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *este o soluţie a inegalităţii diferenţiale*

$$\overrightarrow{a}(x) \cdot \nabla p(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{13}$$

atunci pentru fiecare mulţime deschisă $U \subset \Omega$, *maximul funcţiei* p *în* $\overline{U}$ *este atins pe* ∂U.

Dacă $p \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *este o soluţie a ecuaţiei*

$$\overrightarrow{a}(x) \cdot \nabla p(x) = 0, \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{14}$$

atunci pentru fiecare mulţime deschisă $U \subset \Omega$, *maximul şi minimul funcţiei* p *in* $\overline{U}$ *sunt atinse pe* ∂U.

Capitolul 3 este împărţit la rândul lui în 3 secţiuni şi este dedicat studierii unor ecuaţii cu derivate parţiale relaţionate cu conceptul de "torsional creep".

În secţiunea 3.1 (bazată pe lucrarea [7]), menţinem conexiunea cu precedentul capitol, prin considerarea pentru fiecare număr întreg $n \geq 1$, familia de probleme de valori proprii

$$\begin{cases} -\Delta_{2n} u = \mu u, & \text{for } x \in \Omega \\ u = 0, & \text{for } x \in \partial\Omega \\ ||u||_{L^2(\Omega)} = 1\,, \end{cases} \tag{15}$$

unde $\Delta_{2n} u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{2n-2} \nabla u)$ reprezintă operatorul $2n$-Laplacian şi μ este un număr real. Rezultatul principal asupra problemei (15) este dat de următoarea teoremă (corespunzătoare Teoremei 3.1 din teză):

Theorem 6. *Pentru fiecare număr întreg $n \geq 1$, definim*

$$\mu_1(n) := \inf_{u \in W_0^{1,2n}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{2n}\, dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega u^2\, dx\right)^n}\,.$$

Atunci $\mu_1(n)$ este un număr real pozitiv, care reprezintă cea mai mică valoare proprie a problemei (15). Considerând u_n ca fiind funcţia proprie corespunzătoare a sa, şirul $\{u_n\}$ converge uniform în Ω la $\|\delta\|_{L^2(\Omega)}^{-1} \delta$, unde $\delta(x) := \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$, $\forall\, x \in \Omega$, reprezintă funcţia distanţă la frontiera domeniului Ω .

Scopul secţiunii 3.2 (bazată pe lucrarea [4]), este de a investiga comportamentul asimptotic al soluţiilor pentru următoarea familie de ecuaţii:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{\varphi_n(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u\right) = \varphi_n(1) & \text{in } \quad \Omega \\ u = 0 & \text{on } \quad \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{16}$$

unde, pentru fiecare întreg $n > 1$, funcţiile $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt impare, homeomorfisme de clasă C^1 definite astfel:

$$\varphi_n(t) := p_n |t|^{p_n - 2} t e^{|t|^{p_n}}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,, \tag{17}$$

unde $p_n \in (1, \infty)$ sunt numere reale date, astfel încât $\lim_{n\to\infty} p_n = +\infty$. Rezultatul principal al acestei secţiuni este dat de următoarea teoremă (corespunzătoare Teoremei 3.3 din teză):

Theorem 7. *Problema (16), cu funcţiile φ_n definite prin relaţia (17), are o unică soluţie variaţională pentru fiecare număr întreg $n > 1$, cu $p_n \in [2, \infty)$, pozitivă în Ω, notată u_n. Mai mult, dacă $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$, şirul $\{u_n\}$ converge uniform în Ω la funcţia distanţă la frontiera domeniului Ω.*

În secţiunea 3.3 (bazată pe lucrarea [8]), considerăm $H : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ o normă Finsler şi $\alpha : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o funcţie continuă pentru care există două constante pozitive λ, Λ, astfel încât

$$0 < \lambda \leq \alpha(x,t) \leq \Lambda < +\infty, \ \ \forall\, x \in \overline{\Omega},\ \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Pentru fiecare număr real $p \in (N, \infty)$, considerăm următoarea problemă:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha(x,u) H(\nabla u)^{p-2} \mathcal{H}(\nabla u)) = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{19}$$

unde $f : \overline{\Omega} \to (0, \infty)$ este o funcţie continuă dată şi $\mathcal{H} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ este definită astfel:

$$\mathcal{H}_i(\xi) := \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{2}H(\xi)^2\right), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N,\ \forall\, i \in \{1, ..., N\}\,.$$

Rezultatele principale ale acestei secţiuni sunt date de următoarele teoreme (corespunzătoare Teoremelor 3.5 şi 3.6 din teză):

Theorem 8. *Presupunem condiţia (18) verificată. Atunci, pentru fiecare $p \in (N, \infty)$ problema* (19) *are o soluţie slabă $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ astfel încât $u_p(x) \geq 0$ pentru a.p.t $x \in \Omega$.*

Theorem 9. *Presupunem condiţia (18) verificată. Fie $\{p_n\}_n \subset (N, \infty)$ un şir de numere reale aşa încât $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$. Pentru fiecare $n > 1$ notăm prin $u_{p_n} \in W_0^{1,p_n}(\Omega)$ o soluţie slabă, nenegativă a problemei* (19) *cu $p = p_n$. Atunci, şirul $\{u_{p_n}\}_n$ converge uniform în Ω la funcţia distanţă la frontiera domeniului Ω definită astfel $\delta_H(x) := \inf_{y\in\partial\Omega} H^0(x-y)$, pentru fiecare $x \in \Omega$, unde $H^\circ(x) := \sup_{\xi\neq 0} \frac{\langle x,\xi\rangle}{H(\xi)}$, $\forall\, x,\, \xi \in \mathbb{R}^N$.*

În **Capitolul 4** sunt prezentate câteva probleme deschise din literatură, pe topicul tezei, cu scopul de a ne ghida în cercetările viitoare.

References

[1] M. Fărcăşeanu: An eigenvalue problem involving an anisotropic differential operator, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **62** (2017), 297-306.

[2] M. Fărcăşeanu: On an eigenvalue problem involving the fractional (s, p)-Laplacian, *Fractional Calculus & Applied Analysis.*, **21** (2018), 94-103.

[3] M. Fărcăşeanu, M. Mihăilescu: Continuity of the first eigenvalue for a family of degenerate eigenvalue problems, *Archiv der Mathematik*, **107** (2016), 659-667.

[4] M. Fărcăşeanu, M. Mihăilescu: On a family of torsional creep problems involving rapidly growing operators in divergence form, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, in press.

[5] M. Fărcăşeanu, M. Mihăilescu & D. Stancu-Dumitru: A maximum principle for a class of first order differential operators, New Trends in Differential Equations, Control Theory and Optimisation, pp. 93-103, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2016).

[6] M. Fărcăşeanu, M. Mihăilescu & D. Stancu-Dumitru: Perturbed fractional eigenvalue problems, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-A*, **37** (2017), 6243-6255.

[7] M. Fărcăşeanu, M. Mihăilescu & D. Stancu-Dumitru: On the convergence of the sequence of solutions for a family of eigenvalue problems, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **40** (2017), 6919-6926.

[8] M. Fărcăşeanu, M. Mihăilescu & D. Stancu-Dumitru: On a family of torsional creep problems in Finsler metrics, submitted.