Rezumatul tezei de doctorat

"Metode variaţionale şi de monotonie în studiul unor ecuaţii neliniare",

a drei Ionela-Loredana Stăncuţ

Coordonator: Prof.univ.dr. Vicenţiu Rădulescu

Universitatea din Craiova, 2015

Teza are ca subiect de studiu ecuaţiile cu derivate parţiale (EDP). Studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale a luat naştere în secolul al XVIII-lea, fiind inspirat de modele din mecanică (elasticitate, câmp gravitaţional). Mai târziu, acest studiu a fost stimulat şi de alte probleme fizice sau chimice (spre exemplu, diverse probleme legate de difuzie, electrostatică, electricitate sau magnetism), probleme din biologie, matematică aplicată şi inginerie. Prima ecuaţie cu derivate parţiale a fost ecuaţia coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

unde $u = u(x,t)$ reprezintă elongaţia în punctul x şi la momentul t, iar constanta pozitivă a reprezintă raportul dintre presiunea constantă exercitată asupra coardei şi densitatea acesteia.

Ecuaţiile cu derivate parţiale interacţionează cu o varietate de ramuri ale matematicii şi fizicii, cum ar fi: analiza reală, analiza funcţională, geometria algebrică, geometria diferenţială, fizica matematică sau teoria haosului (teoria sistemelor complexe).

Principala problemă în studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale este existenţa soluţiilor. Una din ideile principale în căutarea *soluţilor slabe* pentru ecuaţii cu derivate parţiale se bazează pe *teoria punctului critic*. Unei ecuaţii i se poate asocia o *funcţională energetică* ale cărei *puncte critice* sunt soluţiile ecuaţiei.

Un instrument principal în găsirea punctelor critice pentru o funcţională Φ este *metoda directă a calculului variaţional* a lui Struwe. Ideea este să căutăm un *minim* pentru Φ ce urmează a fi obţinut ca limită (într-un sens adecvat) a unui *şir minimizant*.

Însă uneori nu este posibil să minimizăm o funcţie continuă nenegativă Φ pe un spaţiu metric complet. O abordare alternativă este să folosim *principiul variaţional al lui Ekeland*.

Acest instrument foarte util afirmă că pentru o funcţie nenegativă Φ de clasă C^1 pe un spaţiu Banach există întotdeauna un şir minimizant (u_n) astfel încât $\Phi'(u_n) \to 0$.

În situaţia când metoda directă a calculului variaţional şi principiul variaţional al lui Ekeland nu pot fi aplicate, atunci *teorema "mountain pass"* a lui Ambrosetti şi Rabinowitz este un alt rezultat valoros în teoria punctului critic. Acest rezultat constă în următoarele: dacă Φ este o funcţie de clasă C^1 pe un spaţiu Banach X care satisface *condiţia Palais–Smale*

(PS) dacă avem un şir (u_n) într-o varietate M astfel încât $|\Phi(u_n)|$ este mărginit şi $\Phi'(u_n) \to 0$, atunci (u_n) este relativ compact (conţine un subşir convergent) în M,

şi *condiţia geometrică*

$$\Phi(0) = 0,$$

$$\Phi(v) \geq \alpha > 0, \quad \text{pentru orice } v \in X \text{ cu } \|v\| = R,$$

$$\Phi(v_0) \leq 0, \quad \text{pentru } v_0 \in X \text{ cu } \|v_0\| > R,$$

atunci există un punct critic netrivial u al lui Φ, adică $\Phi'(u) = 0$ şi $\Phi(u) \geq \alpha$.

Pe lângă aceste instrumente care pot fi aplicate în teoria punctului critic, există şi alte modalităţi de a găsi soluţii pentru ecuaţii cu derivate parţiale, inclusiv variante ale metodelor menţionate mai sus, de exemplu teorema "mountain pass" fără condiţia Palais-Smale sau teorema "mountain pass" simetrică.

Scopul prezentei lucrări este să studiem existenţa soluţiilor slabe pentru diverse ecuaţii cu derivate parţiale. Teza conţine o parte introductivă şi şase capitole principale, pe care le vom prezenta în cele ce urmează.

Capitolul 1 se bazează pe lucrarea *Perturbation effects for a singular elliptic problem with lack of compactness and critical exponent* acceptată în *Minimax Theory and its Applications*. În acest capitol studiem problema

$$-\triangle u = V(x)|x|^{\alpha}|u|^{\frac{N+2+2\alpha}{N-2}} + \lambda g(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

unde $N \geq 3$, $\alpha \in (-2, 0)$, $\lambda > 0$ este un număr real, g aparţine unui spaţiu Sobolev ponderat adecvat, iar V este un potenţial pozitiv pe $\mathbb{R}^N$ care satisface următoarele ipoteze:

(V1) $V \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$;

(V2) $\operatorname*{ess\,lim}_{|x|\to 0} V(x) = \operatorname*{ess\,lim}_{|x|\to\infty} V(x) = V_0 \in (0,\infty)$ and $V(x) \geq V_0$ a.a. $x \in \mathbb{R}^N$;

(V3) $\operatorname{meas}(\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) > V_0\}) > 0$.

Punctul de plecare al abordării variaţionale a problemei (1) îl constituie o inegalitate datorată lui Caffarelli, Kohn şi Nirenberg, care se bazează pe inegalităţile lui Sobolev şi Hardy, concretizată în următoarea lemă.

Lemma 1. *Fie $N \geq 2$, $\alpha \in (0,2)$ şi notăm $2^*_\alpha = \frac{2N}{N-2+\alpha}$. Atunci există $C_\alpha > 0$ astfel încât*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*_\alpha}\,dx\right)^{2/2^*_\alpha} \leq C_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |\nabla u|^2\,dx \tag{2}$$

pentru orice $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Mai exact, vom folosi inegalitatea

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |u|^{\frac{2(N+\alpha)}{N-2}}\,dx\right)^{\frac{N-2}{N+\alpha}} \leq C_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx \tag{3}$$

pentru orice $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, unde $-2 < \alpha < 0$.

În acest capitol căutăm soluţii slabe ale ecuaţiei (1) în spaţiul Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N)$, definit ca închiderea spaţiului $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ în raport cu norma

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Spunem că $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ este o soluţie slabă a problemei (1) dacă

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|x|^\alpha |u|^{\frac{N+2+2\alpha}{N-2}} v\,dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g(x) v\,dx = 0$$

pentru orice $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Considerăm $g \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, spaţiul dual al lui $H^1(\mathbb{R}^N)$.

De asemenea, punem în lumină faptul că soluţiile slabe ale ecuaţiei (1) corespund punctelor critice ale funcţionalei energetice

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{N-2}{2(N+\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|x|^\alpha |u|^{\frac{2(N+\alpha)}{N-2}} dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g(x) u\,dx.$$

Dat fiind acest cadru, scopul nostru este să stabilim existenţa a cel puţin două soluţii pentru ecuaţia (1). Mai exact, vrem să demonstrăm că există un $\lambda_* > 0$ astfel încât ecuaţia (1) are două soluţii distincte dacă $\lambda \in (0, \lambda_*)$. Argumentele folosite se bazează în esenţă pe principiul variaţional al lui Ekeland, teorema ”mountain pass” fără condiţia Palais–Smale, o versiune cu pondere a lemei Brezis–Lieb şi inegalitatea Caffarelli–Kohn–Nirenberg.

Capitolul 2 se bazează pe lucrarea *On the existence of infinitely many solutions of a nonlinear Neumann problem involving the m-Laplace operator* publicată în *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series.* În acest capitol studiem problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{m-2}\nabla u) + |u|^{m-2}u = f(x,u) & \text{în } \Omega, \\ |\nabla u|^{m-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} = g(x,u) & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

unde Ω este un domeniu mărginit în $\mathbb{R}^N$ cu frontiera netedă, $\partial/\partial\nu$ semnifică derivata după direcţia normalei exterioare la frontiera $\partial\Omega$, $f(x,u)$ şi $g(x,u)$ sunt funcţii continue pe $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$ şi, respectiv, pe $\partial\Omega\times\mathbb{R}$ şi impare în raport cu u. Un exemplu tipic este următoarea ecuaţie:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{m-2}\nabla u) + |u|^{m-2}u = a(x)|u|^{p-1}u & \text{în } \Omega, \\ |\nabla u|^{m-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} = b(x)|u|^{q-1}u & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Vom presupune că $a \in C(\overline{\Omega})$, $b \in C(\partial\Omega)$, $a(x)$ şi $b(x)$ îşi pot schimba semnele, $a(x_1) > 0$ în nişte puncte $x_1 \in \Omega$, $b(x_2) > 0$ în nişte puncte $x_2 \in \partial\Omega$, iar p, q satisfac fie (6) fie (7):

$$0 < q < m-1 < p < \frac{(m-1)N+m}{N-m}, \tag{6}$$

$$0 < p < m-1 < q < \frac{(m-1)N}{N-m}. \tag{7}$$

Când $N = 1,2,...,m$, partea dreaptă a inegalităţilor (6) şi (7) sunt înlocuite cu ∞. Arătăm că problema (5) admite cel puţin două şiruri de soluţii u_k şi v_k astfel încât

$$\|u_k\|_{W^{1,m}(\Omega)} \to 0, \quad \|u_k\|_{C(\overline{\Omega})} \to 0 \text{ când } k \to \infty,$$

$$\|v_k\|_{W^{1,m}(\Omega)} \to \infty, \quad \|v_k\|_{C(\overline{\Omega})} \to \infty \text{ când } k \to \infty.$$

Aici $W^{1,m}(\Omega)$ este un spaţiu Sobolev uzual, $\|\cdot\|_{W^{1,m}(\Omega)}$ este norma din spaţiul $W^{1,m}(\Omega)$, iar $\|\cdot\|_{C(\overline{\Omega})}$ este norma maximum.

În Capitolul 2 vom introduce o *condiţie local superliniară* şi o *condiţie local subliniară*. Demonstrăm că există o infinitate de soluţii. Unul din scopurile noastre este să demonstrăm că condiţia local superliniară conduce la un şir de soluţii care diverge la infinit iar condiţia local subliniară conduce la un şir de soluţii care converge la zero. Un alt scop este să studiem existenţa a cel puţin două şiruri de soluţii astfel încât un şir converge la zero, iar celălalt diverge la infinit în fiecare din următoarele cazuri:

(i) una din funcţiile $f(x,u)$ şi $g(x,u)$ este local subliniară, iar cealaltă este local superliniară;

(ii) $f(x,u)$ este şi local subliniară şi local superliniară;

(iii) $g(x,u)$ este şi local subliniară şi local superliniară.

Capitolul 2 cuprinde cinci secţiuni. În cea de a doua secţiune a acestui capitol prezentăm rezultatele principale. În cea de a treia secţiune dăm câteva exemple de funcţii neliniare $f(x,u)$ şi $g(x,u)$ şi aplicăm teoremele noastre acestora pentru a demonstra existenţa a cel puţin două şiruri de soluţii. În cea de a patra secţiune demonstrăm că o soluţie slabă din $W^{1,m}(\Omega)$ aparţine spaţiului $W^{1,r}(\Omega)$ pentru orice $r<\infty$ şi oferim o estimare $W^{1,r}(\Omega)$ a priori. Ultima secţiune conţine demonstraţiile rezultatelor principale folosind metoda variaţională cu ajutorul estimării $W^{1,r}(\Omega)$ a priori.

Capitolul 3 se bazează pe lucrarea *Existence and multiplicity of solutions for a class of isotropic elliptic equations with variable exponent* publicată în *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*. În acest capitol suntem preocupaţi cu problema de valori proprii neomogenă

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)+|u|^{p(x)-2}u=\lambda|u|^{q(x)-2}u-h(x)|u|^{r(x)-2}u & \text{în } \Omega,\\ u=0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

unde $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geq 3)$ este un domeniu cu frontiera netedă, $\lambda>0$ este un număr real, iar p, q sunt funcţii continue pe $\overline{\Omega}$ şi satisfac ipoteza

$$2\leq p(x)<q(x)<r(x)<p^*(x),$$

unde $p^*(x)=\frac{Np(x)}{N-p(x)}$ şi $p(x)<N$ pentru orice $x\in\overline{\Omega}$, iar $h:\overline{\Omega}\to[0,\infty)$ este o funcţie continuă astfel încât

$$\left(\frac{\lambda^{r(x)}}{h(x)^{q(x)}}\right)^{\frac{1}{r(x)-q(x)}}\in L^1(\Omega),$$

$$\left(\frac{\lambda^{r(x)-2}}{h(x)^{q(x)-2}}\right)^{\frac{1}{r(x)-q(x)}}\in L^{\frac{r(\cdot)}{r(\cdot)-2}}(\Omega).$$

Scopul acestui capitol este să demonstrăm existenţa şi multiplicitatea soluţiilor problemei (8). Vom lucra pe un subspaţiu al *spaţiului Sobolev cu exponent variabil* $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ definit astfel

$$E = \left\{ u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega);\ \int_\Omega h(x)|u|^{r(x)}dx < \infty \right\}.$$

Principalul rezultat din Capitolul 3 scoate în evidenţă următoarele efecte de perturbare:

(i) prima teoremă afirmă că, dacă perturbarea din partea dreaptă a ecuaţiei (8) este tare (aceasta corespunde cu faptul că λ este suficient de mare), atunci există cel puţin două soluţii netriviale diferite;

(ii) cea de a doua teoremă afirmă că, dacă perturbarea din partea dreaptă a ecuaţiei (8) este slabă (aceasta corespunde cu faptul că λ este suficient de mic), atunci nu există vreo soluţie netrivială.

Amintim că $\lambda \in \mathbb{R}$ este o valoare proprie a problemei (8) dacă există $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \setminus \{0\}$ care satisface $\int_\Omega h(x)|u|^{r(x)}dx < \infty$ astfel încât

$$\int_\Omega \big(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p(x)-2}uv\big)dx - \lambda \int_\Omega |u|^{q(x)-2}uv\, dx + \int_\Omega h(x)|u|^{r(x)-2}uv\ dx = 0$$

pentru orice $v \in E$. Scoatem în evidenţă faptul că, dacă λ este o valoare proprie a problemei (8), atunci elementul corespunzător $u \in E$ este o soluţie slabă a problemei (8).

Demonstraţia primei teoreme este împărţită în doi paşi. La *Pasul 1* demonstrăm existenţa unei soluţii netriviale pentru problema (8). În primul rând arătăm că *funcţionala energetică* $\Phi : E \to \mathbb{R}$ (ale cărei puncte critice sunt exact soluţiile slabe ale problemei (8)) definită de

$$\Phi(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\big(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\big)dx - \lambda \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx + \int_\Omega \frac{h(x)}{r(x)}|u|^{r(x)}dx$$

este *coercivă* şi *slab inferior semicontinuă* pe E şi astfel deducem că există o soluţie slabă $\tilde{u}$ a problemei (8). În al doilea rând, demonstrăm că $\tilde{u} \not\equiv 0$ în E. Apoi, la *Pasul 2*, cea de a doua soluţie $\hat{u}$ este obţinută în esenţă folosind teorema "mountain pass" şi scufundări Sobolev, demonstrând în acelaşi timp că $\tilde{u} \neq \hat{u}$.

Cea de a doua teoremă (care afirmă că nu există soluţii netriviale pentru problema (8)) o demonstrăm prin metoda reducerii la absurd.

Capitolul 4 se bazează pe lucrarea *Combined concave-convex effects in anisotropic elliptic equations with variable exponent* publicată în *Nonlinear Differential Equations and*

Applications NoDEA. În acest capitol studiem soluţiile slabe ale problemei de valori proprii anizotrope neomogene

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}\left(|\partial_{x_i} u|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i} u\right) = \lambda |u|^{q(x)-2}u - h(x)|u|^{r(x)-2}u & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) este un domeniu mărginit cu frontiera netedă $\partial\Omega$, $\lambda > 0$ este un număr real, p_i, q, r sunt funcţii continue pe $\overline{\Omega}$ astfel încât $2 \leq p_i(x) < N$, $2 < q(x) < r(x)$ pentru orice $x \in \overline{\Omega}$ şi $i \in \{1, ..., N\}$, iar $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ este o funcţie pondere pozitivă, continuă, care satisface condiţiile:

$$\int_\Omega \lambda^{\frac{r(x)}{r(x)-q(x)}} \frac{1}{h(x)^{\frac{q(x)}{r(x)-q(x)}}} dx < \infty,$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\lambda}{h(x)^{\frac{q(x)-2}{r(x)-2}}} \right)^{\frac{r(x)}{r(x)-q(x)}} dx < \infty.$$

În Capitolul 4 căutăm soluţii slabe pentru problema (9) într-un subspaţiu E al spaţiului Sobolev anisotropic cu exponent variabil $W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$ definit prin

$$E = \left\{ u \in W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega); \ \int_\Omega h(x)|u|^{r(x)} dx < \infty \right\}.$$

Spunem că $u \in E$ este o soluţie slabă a ecuaţiei (9) dacă $u = 0$ aproape peste tot pe $\partial\Omega$ şi

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{N} |\partial_{x_i} u|^{p_i(x)-2} \partial_{x_i} u \partial_{x_i} v - \lambda |u|^{q(x)-2} uv + h(x)|u|^{r(x)-2} uv \right\} dx = 0$$

pentru orice $v \in E$.

Primul rezultat principal al acestui capitol afirmă că nu există soluţii slabe netriviale pentru problema (9) dacă λ este suficient de mic. Demonstraţia acestei teoreme se bazează în esenţă pe metoda reducerii la absurd.

Apoi, ne propunem să arătăm că există cel puţin două soluţii slabe netriviale pentru problema (9) dacă λ este suficient de mare. Pentru aceasta definim funcţionala energetică $\Phi : E \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\Phi(u) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{N} \frac{|\partial_{x_i} u|^{p_i(x)}}{p_i(x)} - \frac{\lambda}{q(x)} |u|^{q(x)} + \frac{h(x)}{r(x)} |u|^{r(x)} \right\} dx$$

a cărei derivată este dată de

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^N |\partial_{x_i} u|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i} u \partial_{x_i} v - \lambda |u|^{q(x)-2}uv + h(x)|u|^{r(x)-2}uv \right\} dx$$

pentru orice $u, v \in E$. Astfel, punctele critice ale funcţionalei Φ sunt exact soluţiile slabe ale problemei (9). În primul rând arătăm că există $u_1 \in E$ un minimizant global al funcţionalei Φ astfel încât $\inf_E \Phi < 0$ şi astfel obţinem prima soluţie slabă netrivială a problemei (9).

Apoi, alegem

$$g(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ \lambda t^{q(x)-1} - h(x) t^{r(x)-1}, & \text{dacă } 0 \le t \le u_1(x) \\ \lambda u_1(x)^{q(x)-1} - h(x) u_1(x)^{r(x)-1}, & \text{dacă } t > u_1(x) \end{cases}$$

şi

$$G(x,t) = \int_0^t g(x,s)\, ds.$$

Definim funcţionala $\Psi : E \to \mathbb{R}$ prin

$$\Psi(u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{|\partial_{x_i} u|^{p_i(x)}}{p_i(x)} dx - \int_\Omega G(x,u) dx.$$

Este evident că $\Psi \in C^1(E, \mathbb{R})$ şi

$$\langle \Psi'(u), v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^N |\partial_{x_i} u|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i} u \partial_{x_i} v \, dx - \int_\Omega g(x,u) v \, dx,$$

pentru orice $u, v \in E$.

Folosind teorema "mountain pass" găsim un punct critic $u_2 \in E$ al funcţionalei Ψ astfel încât $\Psi(u_2) > 0$ şi arătăm că $0 \le u_2 \le u_1$ în Ω. Aşadar

$$g(x, u_2) = \lambda u_2^{q(x)-1} - h(x) u_2^{r(x)-1} \quad \text{şi} \quad G(x,u_2) = \frac{\lambda}{q(x)} u_2^{q(x)} - \frac{h(x)}{r(x)} u_2^{r(x)}$$

şi astfel

$$\Psi(u_2) = \Phi(u_2) \quad \text{şi} \quad \Psi'(u_2) = \Phi'(u_2).$$

Mai exact, obţinem

$$\Phi(u_2) > 0 = \Phi(0) > \Phi(u_1) \quad \text{şi} \quad \Phi'(u_2) = 0.$$

Aceasta arată de fapt că u_2 este o soluţie slabă a problemei (9) astfel încât $0 \leq u_2 \leq u_1$, $u_2 \neq 0$ şi $u_2 \neq u_1$.

Capitolul 5 se bazează pe lucrarea *Spectrum for anisotropic equations involving weights and variable exponents* publicată în *Electronic Journal of Differential Equations.* În acest capitol analizăm spectrumul unei probleme anizotrope neomogene care implică exponenţi variabili pe un domeniu mărginit cu frontiera netedă în $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$, şi anume

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left[\partial_{x_i}(|\partial_{x_i} u|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i} u) + |u|^{p_i(x)-2}u\right] + |u|^{q(x)-2}u = \lambda g(x)|u|^{r(x)-2}u & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

unde p_i, q, $r : \overline{\Omega} \to [2, \infty)$ sunt funcţii Lipschitz continue, iar $g : \overline{\Omega} \to [0, \infty)$ este o funcţie măsurabilă pentru care există o submulţime deschisă $\Omega_0 \subset \Omega$ astfel încât $g(x) > 0$ pentru orice $x \in \Omega_0$, iar $\lambda \geq 0$ este un număr real.

În Capitolul 5 tratăm problema (10) astfel încât funcţiile p_i, q şi r satisfac ipotezele

$$2 \leq P_-^- \leq P_+^+ < N, \tag{11}$$

$$P_-^+ \leq P_+^+ < r^- \leq r^+ < q^- \leq q^+ < P_-^* \leq p_i^*(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega} \text{ şi } \forall i \in \{1, \dots, N\}. \tag{12}$$

Mai mult decât atât, presupunem că funcţia $g(x)$ satisface ipotezele

$$\int_\Omega (\lambda g(x))^{\frac{q(x)}{q(x)-r(x)}} dx < \infty, \tag{13}$$

$$g \in L^\infty(\Omega) \cap L^{p_i^0(\cdot)}(\Omega), \tag{14}$$

unde $p_i^0(x) = \frac{p_i^*(x)}{p_i^*(x)-r^-}$ pentru orice $x \in \overline{\Omega}$ şi orice $i \in \{1, \dots, N\}$.

Căutăm soluţii slabe pentru problema (10) în *spaţiul Sobolev anizotrop cu exponent variabil* $W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$.

Spunem că $\lambda \in \mathbb{R}$ este o *valoare proprie* a problemei (10) dacă există un element $u \in W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega) \setminus \{0\}$ astfel încât

$$\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{N} \left(|\partial_{x_i} u|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i} u \partial_{x_i} v + |u|^{p_i(x)-2}uv\right) + |u|^{q(x)-2}uv\right] dx - \lambda \int_\Omega g(x)|u|^{r(x)-2}uv\, dx = 0,$$

pentru orice $v \in W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$. Dacă λ este o valoare proprie a problemei (10), atunci elementul corespunzător $u \in W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega) \setminus \{0\}$ este o *soluţie slabă* a problemei (10).

Definim

$$\lambda_1 := \inf_{u\in W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\partial_{x_i}u|^{p_i(x)}}{p_i(x)} + \frac{|u|^{p_i(x)}}{p_i(x)}\right)dx + \int_\Omega \frac{|u|^{q(x)}}{q(x)}dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{g(x)}{r(x)}|u|^{r(x)}dx},$$

$$\lambda_0 := \inf_{u\in W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(|\partial_{x_i}u|^{p_i(x)} + |u|^{p_i(x)}\right)dx + \int_\Omega |u|^{q(x)}dx}{\displaystyle\int_\Omega g(x)|u|^{r(x)}dx}.$$

Rezultatul principal al acestui capitol afirmă că, sub condiţiile (11)-(14), avem $0 < \lambda_0 \le \lambda_1$ şi orice $\lambda \in (0, \lambda_0)$ nu este o valoare proprie a problemei (10), dar orice $\lambda \in [\lambda_1, \infty)$ este o valoare proprie a problemei (10). Pentru a demonstra acest rezultat definim funcţionalele $J_1,\ I_1,\ J_0,\ I_0 : W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ prin

$$J_1(u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\partial_{x_i}u|^{p_i(x)}}{p_i(x)} + \frac{|u|^{p_i(x)}}{p_i(x)}\right)dx + \int_\Omega \frac{|u|^{q(x)}}{q(x)}dx,$$

$$I_1(u) = \int_\Omega \frac{g(x)}{r(x)}|u|^{r(x)}dx,$$

$$J_0(u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(|\partial_{x_i}u|^{p_i(x)} + |u|^{p_i(x)}\right)dx + \int_\Omega |u|^{q(x)}dx,$$

$$I_0(u) = \int_\Omega g(x)|u|^{r(x)}dx.$$

Argumente standard asigură faptul că $J_1,\ I_1 \in C^1(E, \mathbb{R})$, cu derivatele date de

$$\langle J_1'(u), v\rangle = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^N \left(|\partial_{x_i}u|^{p_i(x)-2}\partial_{x_i}u\partial_{x_i}v + |u|^{p_i(x)-2}uv\right) + |u|^{q(x)-2}uv\right]dx,$$

$$\langle I_1'(u), v\rangle = \int_\Omega g(x)|u|^{r(x)-2}uv\,dx.$$

Pentru orice $\lambda > 0$ definim de asemenea funcţionala $T_\lambda^1(u) = J_1(u) - \lambda \cdot I_1(u)$ pentru orice $u \in W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$. Menţionăm că λ este o valoare proprie a problemei (10) dacă şi numai dacă există $u_\lambda \in W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega) \setminus \{0\}$, care este un punct critic al funcţionalei T_λ^1.

Împărţim demonstraţia teoremei în patru paşi. La Pasul 1 arătăm că $\lambda_0,\ \lambda_1 > 0$. La Pasul 2 demonstrăm prin contradicţie că orice $\lambda \in (0, \lambda_0)$ nu este o valoare proprie a problemei (10). Apoi, la Pasul 3 arătăm că orice $\lambda \in (\lambda_1, \infty)$ este o valoare proprie a problemei (10). În acest scop demonstrăm că funcţionala T^1_λ este coercivă şi slab inferior semicontinuă pentru a obţine $u_\lambda \in W_0^{1,\vec{p}(\cdot)}(\Omega)$, un punct de minim global al lui T^1_λ şi astfel un punct critic pentru T^1_λ. Pentru a completa demonstraţia de la Pasul 3 arătăm de asemenea că u_λ nu este trivial. În final, la Pasul 4 demonstrăm că λ_1 este o valoare proprie a problemei (10). Ţinând seama de Paşii 2-4 deducem că $\lambda_0 \leq \lambda_1$, ceea ce completează demonstraţia rezultatului principal.

Capitolul 6 se bazează pe lucrarea *Eigenvalue problems for anisotropic equations involving a potential on Orlicz-Sobolev type spaces* publicată în *Opuscula Mathematica.* Aici studiem problema de valori proprii, anizotropă

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \partial_i(\varphi_i(\partial_i u)) + V(x)|u|^{m(x)-2}u = \lambda(|u|^{q_1(x)-2} + |u|^{q_2(x)-2})u & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{15}$$

unde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ este un domeniu mărginit cu frontiera netedă, $\lambda > 0$ este un număr real, $V : \Omega \to \mathbb{R}$ este un potenţial care satisface $V \in L^{r(x)}(\Omega)$, $r(x) \in C(\overline{\Omega})$, iar q_1, q_2, m : $\overline{\Omega} \to (2, \infty)$ sunt funcţii continue. Considerăm că, pentru orice $i \in \{1, ..., N\}$, φ_i sunt homeomorfisme crescătoare, impare din $\mathbb{R}$ în $\mathbb{R}$.

În acest capitol căutăm soluţii slabe pentru problema (15) într-un subspaţiu al *spaţiului Orlicz-Sobolev anizotrop* $W_0^1 L_{\vec{\Phi}}(\Omega)$, şi anume

$$E := \left\{ u \in W_0^1 L_{\vec{\Phi}}(\Omega);\ \int_\Omega |V(x)||u|^{m(x)} dx < \kappa,\ \text{cu}\, \kappa > 0 \text{ constantă reală} \right\}.$$

Definim funcţionalele J_V, $I : E \to \mathbb{R}$ prin

$$J_V(u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \Phi_i(|\partial_i u|)dx + \int_\Omega \frac{V(x)}{m(x)}|u|^{m(x)}dx,$$
$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{q_1(x)}|u|^{q_1(x)}dx + \int_\Omega \frac{1}{q_2(x)}|u|^{q_2(x)}dx.$$

Atunci, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, definim funcţionala energetică asociată problemei (15), T_λ : $E \to \mathbb{R}$, prin

$$T_\lambda(u) = J_\lambda(u) - \lambda \cdot I(u).$$

Observăm că J_V, $I \in C^1(E,\mathbb{R})$, cu derivatele

$$\langle J_V'(u),v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^N a_i(|\partial_i u|)\partial_i u \partial_i v \ dx + \int_\Omega V(x)|u|^{m(x)-2}uv \ dx,$$
$$\langle I'(u),v\rangle = \int_\Omega |u|^{q_1(x)-2}uv \ dx + \int_\Omega |u|^{q_2(x)-2}uv \ dx,$$

pentru orice $u, v \in E$. Prin urmare, $T_\lambda \in C^1(E,\mathbb{R})$ şi

$$\langle T_\lambda'(u),v\rangle = \langle J_V'(u),v\rangle - \lambda\langle I'(u),v\rangle, \quad \forall\, u,v \in E.$$

Astfel, λ este o valoare proprie a problemei (15) dacă şi numai dacă există $u \in E \setminus \{0\}$, un punct critic al funcţionalei T_λ.

În Capitolul 6 ne propunem să demonstrăm trei rezultate principale, printre alte rezultate auxiliare.

Prima teoremă din acest capitol afirmă că orice $\lambda > 0$ este o valoare proprie a problemei (15) sub ipoteza

$$2 < (P^0)_+ < q_2^- \le q_2^+ \le m^- \le m^+ \le q_1^- \le q_1^+ < q_1^+ \cdot r^{-'} < (P_0)^*.$$

În ceea ce priveşte demonstraţia, folosim teorema "mountain-pass" pentru a obţine existenţa unui şir $(u_n) \subset E$ astfel încât

$$T_\lambda(u_n) \to \bar{c} > 0 \text{ şi } T_\lambda'(u_n) \to 0 \text{ (în } E^*) \text{ când } n \to \infty. \tag{16}$$

De asemenea, demonstrăm prin reducere la absurd că (u_n) este mărginit în E. Această informaţie, împreună cu faptul că E este spaţiu reflexiv, implică existenţa unui subşir, notat tot cu (u_n), şi a unui element $u_0 \in E$ astfel încât (u_n) converge slab la $u_0 \in E$. Aceasta ne conduce la

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \Phi_i\left(\left|\frac{\partial_i u_n - \partial_i u_0}{2}\right|\right) dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{17}$$

ceea ce înseamnă că $u_n \to u_0$ în E. Astfel, (16) şi (17) implică

$$T_\lambda(u_0) = \bar{c} > 0 \ \text{ şi } \ T_\lambda'(u_0) = 0.$$

În consecinţă, $u_0 \in E$ este o soluţie slabă netrivială a problemei (15).

Cea de a doua teoremă din Capitolul 6 afirmă că, sub ipoteza

$$2 < q_2^- \leq q_2^+ \leq q_1^- \leq q_1^+ \leq m^- \leq m^+ < m^+ \cdot r^{-'} < (P_0)_- \leq (P_0)^*,$$

există $\lambda_* > 0$ astfel încât orice $\lambda \in (0, \lambda_*]$ este o valoare proprie a problemei (15).

Mai întâi, demonstrăm că există $\lambda_* > 0$ astfel încât, pentru orice $\lambda \in (0, \lambda_*]$, există $\rho > 0$ şi $a > 0$ pentru care $T_\lambda(u) \geq a > 0$ pentru orice $u \in E$ cu $\|u\|_{\vec{\Phi}} = \rho$. Aceasta înseamnă că, pe bila $B_\rho(0)$, avem $\inf_{\partial B_\rho(0)} T_\lambda > 0$. Apoi, arătăm că există $\theta \in E$ astfel încât $\theta \geq 0$, $\theta \not\equiv 0$ şi $T_\lambda(t\theta) < 0$ pentru $t > 0$ suficient de mic. De fapt, putem demonstra că $-\infty < \underline{c} := \inf_{\overline{B_\rho(0)}} T_\lambda < 0$. Bazându-ne pe argumente variaţionale întemeiate pe principiul variaţional al lui Ekeland, deducem că există un şir $(w_n) \subset B_\rho(0)$ astfel încât

$$T_\lambda(w_n) \to \underline{c} \ \text{ şi } \ T'_\lambda(w_n) \to 0. \tag{18}$$

Este clar că (w_n) este mărginit în E. Astfel, există $w \in E$ astfel încât, trecând la un subşir, (w_n) converge slab la w în E. De fapt, obţinem că (w_n) converge tare la w în E. Ţinând seama de (18) obţinem în final că

$$T_\lambda(w) = \underline{c} < 0 \ \text{ şi } \ T'_\lambda(w) = 0,$$

adică, w este o soluţie slabă netrivială pentru problema (15).

Cea de a treia teoremă din Capitolul 6 afirmă că, sub ipoteza

$$2 < q_2^- \leq q_2^+ \leq m^- \leq m^+ \leq q_1^- \leq q_1^+ < q_1^+ \cdot r^{-'} < (P_0)_- \leq (P_0)^*,$$

există $\lambda^* > 0$ astfel încât orice $\lambda \in [\lambda^*, \infty)$ este o valoare proprie a problemei (15).

Pentru a demonstra această din urmă teoremă, ţinem cont de faptul că funcţionala T_λ este coercivă şi slab inferior semicontinuă pe E. Astfel, obţinem un element $\underline{u} \in E$, minimizant global al funcţionalei T_λ şi, prin urmare, o soluţie slabă a problemei (15). În plus, arătăm că $\underline{u}$ nu este trivială pentru λ suficient de mare.

Teza se încheie cu o listă de referinţe bibliografice care include 137 de lucrări.