Universitatea din Craiova
Facultatea de Ştiinţe
Şcoala Doctorală de Ştiinţe

Luisa-Maria Niţu

Clase de filtre în algebre ale logicii fuzzy

Rezumat al Tezei de Doctorat

coordonator ştiinţific: Prof. univ. dr. Dumitru Buşneag

Craiova
2017

Cuprins

Capitolul 1

Introducere

Scopul acestei teze este de a extinde unele rezultate de la, latici la cazul laticilor reziduate. În această teză vom lucra cu latici reziduate comutative şi necomutative. În restul tezei vom înţelege prin latice reziduată, o latice reziduată comutativă şi printr-o latice reziduată mărginită integrală, o latice reziduată necomutativă. Am realizat un studiu al distributivităţii laticilor reziduate şi am dat o nouă caracterizare a elementelor booleene, regulate şi dense într-o latice reziduată necomutativă. De asemenea, vom extinde unele rezultate de la, laticile normale la cazul laticilor reziduate i-normale definite în [17], [18] şi pornind de la [22], [23] vom realiza o clasificare a filtrelor implicative în laticile reziduate. Subiectul acestei teze este situat în domeniul algebra logicii. Rezultatele pe care le prezentăm pot fi găsite în următoarele trei documente aparţinând autorului acestei teze: [29], [30] and [65]. În această introducere, vom prezenta motivaţia principală pentru studierea acestor subiecte şi dăm o prezentare generală a tezei.

1.1 Logici multivalente şi algebrele lor

Între logica matematică şi algebră există o relaţie complexă şi sunt strâns legate. Algebra logicii şi logica algebrică sunt două dintre cazurile care reprezintă această relaţie (see [47]). Logica matematică este o disciplină care aparţine matematicii şi logicii în egală măsură.

Metode algebrice au fost introduse în logică de George Boole în patru scrieri ([10], [11], [12] şi [13]) publicate în jurul anului 1850. Termenul "algebra logicii" a fost impus de succesorii lui Boole (De Morgan, Schröder şi Pierce). Prima lucrare de logică a lui Moisil se numeşte "Recherches sur l'algèbre de la logique" (see [94]). Noţiunea de "algebră Boole" apare în [124]. Teoria algebrelor Boole a fost intens dezvoltată de Stone, Birkhoff şi Tarski în deceniul patru al secolului trecut.

M. Ward şi R. P. Dilworth au fost primii care au introdus conceptul de *latice reziduată*

([122],[123]) ca o generalizare de latici de inele. În definiţia pe care o folosesc, o latice reziduată este ceea ce noi numim *comutativă integrală* . Definiţia generală pentru o latice reziduată, aşa cum este utilizată în prezent, a fost dată de K. Blount, P. Jipsen, T. Kowalski şi H. Ono în [45].

Laticile reziduate includ clase importante de algebre precum BL- algebre (definite de P. H*á*jek ca omologul algebric al logicii de bază) şi MV-algebre (definite de Chang în [31] pentru a demonstra teorema de completitudine a calculelor Łukasiewicz). În 1998, P. H*á*jek ([61]) a introdus noţiunea de BL-algebre, de asemenea, a definit conceptul de filtre şi filtre prime în BL-algebre. Utilizând filtrele prime în BL-algebre, a reuşit să demonstreze completitudinea Logicii de Bază. În 1999, E. Turunen ([114]) a publicat un studiu pe BL-algebre şi sistemele lor deductive.

Laticile reziduate au importante proprităţi algebrice (vezi [27], [61], [108] şi [114]).

În [27], este prezentată o nouă caracterizare a elementelor complementate, care utilizează conceptele de elemente *regulate* şi *dense*.

P. M. Idziak a demostrat în [68] că, clasa laticilor reziduate este ecuaţională. De-a lungul timpului, aceste latici au fost cunoscute sub multe nume: *BCK- latici* în [64], *full BCK-algebre* în [82], FL_{ew}*- algebre* în [102], de asemenea, *l-monoizi comutativi, integrali, reziduaţi* în [4], [5].

Laticile reziduate necomutative, în unele cazuri numite *pseudo-latici reziduate*, sunt omologi algebrici ai logicilor-sub-structurale. Studii pe laticile reziduate necomutative au fost dezvoltate de Ono, Jipsen, Galatos, Tsinakis şi Kowalski în [45] şi [81]. Clase particulare de latici reziduate sunt full Lambek algebre (FL*- algebre)* şi *latici reziduate mărginite integrale* (FL_w*- algebre*).

În 1999, G. Georgescu şi A. Iorgulescu ([50]) definesc *pseudo-BL algebrele* ca o generalizare a BL-algebrelor pentru cazul necomutativ. Proprietăţi ale pseudo-BL-algebrelor au fost intens dezvoltate de A. Di Nola, G. Georgescu şi A. Iorgulescu în [40] şi [41]. Clase de pseudo-BL-algebre au fost investigate în [53] şi logica propoziţională corespunzătoare a fost stabilită şi aprofundată de Hájek în [61] şi [62].

O structură mai generală decât cea a pseudo-BL-algebrelor este cazul *pseudo-MTL algebrelor* (sau *weak pseudo-BL algebre*) definite de P. Flondor, G. Georgescu şi A. Iorgulescu în [44]. Proprietăţile şi caracteristicile pseudo-MTL algebrelor au fost intens studiate în [35], [54], [74] şi [75].

În 2014, L. C. Ciungu a publicat ([36]), un important studiu in câmpul algebrelor necomutative ale logicii multivalente.

1.2 Prezentare generală a tezei

Teza este organizată după cum urmează: **Capitolul 2** este dedicat definiţiilor de bază şi rezultatelor despre structurile folosite în această teză.

În **Secţiunile 1** şi **2** amintim noţiunile de bază, punem în evidenţă mai multe reguli de calcul, clase de latici reziduate şi exemple de latici reziduate de care avem nevoie în restul tezei.

În **Secţiunea 3** evidenţiem anumite condiţii suficiente pentru distributivitatea laticilor reziduate (vezi Teorema 2.5). Noi am reuşit să obţinem o caracterizare parţială pentru distributivitatea laticilor reziduate doar cu condiţii suficiente.

Amintim câteva clase de latici reziduate şi realizăm o clasificare detaliată pe baza distributivităţii lor.

Secţiunea 4 conţine definiţii şi rezultate cunoscute despre centrul boolean, elemente dense şi regulate în latici reziduate pe care o să le extindem în capitolul 3 în cazul laticilor reziduate necomutative.

În **Seţiunea 5** prezentăm un studiu al teoriei filtrelor implicative (i-filtrelor, pe scurt) în latici reziduate. Menţionăm câteva exemple pentru a vedea mai uşor diferite proprietăţi. Ne concentrăm studiul asupra proprietăţilor filtrelor implicative în laticile reziduate.

În **Secţiunea 6** reamintim noţiuni despre morfisme si produse directe de latici reziduate şi prezentăm exemple şi proprietăţi.

În **Capitolul 3**, lucrăm în cazul general al unei latici reziduate necomutative (mai precis, lucrăm cu *latici reziduate mărginite integrale*, sau FL_w*- algebre*) şi extindem pe cazul necomutativ anumite rezultate din [27].

Secţiunea 1 conţine definiţii de bază, exemple, mai multe reguli de calcul şi clase de latici reziduate mărginite integrale.

Folosind [36] (Teorema 4.4 şi Propoziţiile 2.1, 2.2) stabilim conexiuni între o latice reziduată mărginită integrală şi o pseudo MV-algebră.

În finalul acestei secţiuni prezentăm proprietăţi ale unei latici reziduate necomutative care îndeplineşte

(W) $(x \to y) \rightsquigarrow y = (y \to x) \rightsquigarrow x$ şi $(x \rightsquigarrow y) \to y = (y \rightsquigarrow x) \to x$.

În **Secţiunea 2** o importantă construcţie pentru o latice reziduată mărginită integrală A este centrul Boolean $B(A)$, care conţine toate elementele complementate ale lui A. Amintim definiţiile şi propretăţile centrului Boolean şi elementelor booleene..

Dăm o nouă caracterizare pentru elementele involutive şi idempotente într-o latice reziduată mărginită integrală.

În această secţiune punem în evidenţă noi reguli de calcul cu elemente booleene într-o latice reziduată mărginită integrală A (vezi Lema 3.4).

Introducem definiţia elementelor regulate, strong şi dense într-o latice reziduată mărginită integrală şi dăm noi caracterizări pentru aceste elemente.

În **Capitolul 4**, transferăm anumite rezultate de la o latice normală la cazul laticei i-normale definite în [17], [18].

Secţiunea 1 conţine definiţii şi proprietăţi cunoscute despre latici normale.

Definiţia 4.1. O latice mărginită distributivă L care verifică condiţia: pentru orice $x, y \in L$ cu $x \wedge y = 0$, există $z, t \in L$ astfel încât $x \wedge z = y \wedge t = 0$ şi $z \vee t = 1$, se numeşte *normală*.

L se numeşte *co-normală* dacă şi numai dacă este dual normală (asta înseamnă că, pentru toţi $x, y \in L$, dacă $x \vee y = 1$, există $z, t \in L$ astfel încât $z \wedge t = 0$ şi $z \vee x = t \vee y = 1$).

În **Secţiunea 2**, transferăm definiţii şi anumite rezultate de la, laticea normală la cazul laticei i-normale şi facem o caracterizare a laticilor normale cu ajutorul laticei co-normale $\mathcal{F}_{ip}(L)$.

În [48], laticile reziduate i-normale sunt numite *latici reziduate cu proprietatea Gelfand* (sau *latici reziduate Gelfand*). Prprietăţile Gelfand au loc în laticile reziduatăte Stone, BL-algebre, dar nu au loc în orice latice reziduată.

În această secţiune, introducem noţiunea de i-filtru comaximal într-o latice reziduată şi noţiunea de anihilator al lui a relativ la b.

Două i-filtre P şi Q într-o latice reziduată L se numesc *comaximale* dacă $P \vee_i Q = L$.

Dacă L este o latice reziduată şi $a, b \in L$, atunci considerăm mulţimea
$\langle a, b \rangle = \{x \in L : a^n \odot x \leq b$ pentru $n \geq 1\}$ (este numită anihilatorul lui a relativ la b ([91])).

Demonstrăm că anihilatorul lui a relativ la b intr-o latice reziduată este un ideal şi realizăm o caracterizare a laticilor reziduate i-normale.

În **Capitolul 5**, realizăm un studiu al filtrelor implicative în laticile reziduate şi stabilim o importantă clasificare şi conexiuni între aceste tipuri de filtre.

În [22], se propune ca, principalele nume de filtre implicative F ale unei latici reziduate L să fie reprezentate de numele clasei algebrei care conţine laticea reziduată L/F.

Fie $\mathcal{V}$ o subvarietate a varietăţii laticilor reziduate.

Noi realizăm o clasificare a filtrelor implicative în laticile reziduate după cum urmează:

– clasa $\mathcal{V} = \mathbf{BF}$ a i-filtrelor Boole;
– clasa $\mathcal{V} = \mathbf{GF}$ a i-filtrelor Heyting;
– clasa $\mathcal{V} = \mathbf{MVF}$ a i-filtrelor MV;
– clasa $\mathcal{V} = \mathbf{RF}$ a i-filtrelor involutive;
– clasa $\mathcal{V} = \mathbf{SgF}$ a i-filtrelor semi-G;
– clasa $\mathcal{V} = \mathbf{StF}$ a i-filtrelor Stone;
– clasa $\mathcal{V} = \mathbf{MTLF}$ a i-filtrelor MTL;
– clasa $\mathcal{V} = \mathbf{DivF}$ a i-filtrelor divizibile;
– clasa $\mathcal{V} = \mathbf{BLF}$ a i-filtrelor BL.

Capitolul 2

Preliminarii

2.1 Latici reziduate. Noţiuni de bază

Definiţia 2.1. ([*45*], [*123*]) O algebră $(L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ de tipul $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ va fi numită *latice reziduată comutativă integrală* (*latice reziduată*) dacă

Lr_1 : $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ este latice mărginită;

Lr_2 : $(L, \odot, 1)$ este monoid comutativ;

Lr_3 : pentru orice $x, y, z \in L$, $x \leq y \rightarrow z$ dacă şi numai dacă $x \odot y \leq z$.

Vom nota cu $\mathcal{RL}$ clasa laticilor reziduate.

2.1.1 Exemple de latici reziduate

Am pus în evidenţă exemple de latici reziduate ([76]).

2.1.2 Reguli de calcul în latici reziduate

În cele ce urmează prin L notăm universul unei latici reziduate. Pentru $x \in L$ definim $x^* = x \rightarrow 0$, $x^{**} = (x^*)^*$, $x^0 = 1$ şi $x^n = x^{n-1} \odot x$, pentru $n \geq 1$.

Pentru $x, y, z \in L$, avem mai multe reguli de calcul ([27],[17],[45],[108],[114]).

2.2 Clase de latici reziduate

Amintim câteva clase de latici reziduate şi realizăm o clasificare detaliată pe baza distributivităţii lor.

2.3 Latici reziduate distributive

În această secţiune evidenţiem anumite condiţii suficiente pentru distributivitatea laticilor reziduate (vezi Teorema 2.5). Noi am reuşit să obţinem o caracterizare parţială pentru distributivitatea laticilor reziduate doar cu condiţii suficiente.

Pe baza proprietăţii de distributivitate dividem laticile reziduate în două clase: latici reziduate distributive (G-algebre, MTL-algebre, BL-algebre, latici reziduate divizibile, MV-algebre, MTL-algebre involutive, weak nilpotent minimum algebre, NM-algebre, respectiv algebre Produs) şi latici reziduate nedistributive.

2.3.1 Condiţii suficiente pentru distributivitate într-o latice reziduată

2.4 Centrul Boolean, elemente regulate şi dense în latici reziduate

Secţiunea aceasta conţine definiţii şi rezultate cunoscute despre centrul boolean, elemente dense şi regulate în latici reziduate pe care o să le extindem în capitolul 3 în cazul laticilor reziduate necomutative.

2.5 Filtre implicative în latici reziduate

În această secţiune prezentăm un studiu al teoriei filtrelor implicative în latici reziduate. Menţionăm câteva exemple pentru a vedea mai uşor diferite proprietăţi. Ne concentrăm studiul asupra proprietăţilor filtrelor implicative în laticile reziduate.

2.5.1 Filtre (ideale) într-o latice

La început, pentru înţelegerea mai uşoară a teoriei i-filtrului în latici reziduate ne amintim câteva noţiuni şi proprietăţi ale filtrelor (idealelor) în teoria laticei.

2.5.2 Filtre implicative în latici reziduate

Notăm prin $\mathcal{F}_i(L)$ ($\mathcal{F}_{ip}(L)$, $Spec_i(L)$, $Max_i(L)$) mulţimea tuturor i-filtrelor (mulţimea tuturor i-filtrelor principale, mulţimea tuturor i-filtrelor proprii şi mulţimea tuturor i-filtrelor proprii maximale) ale lui L. Clar, $\mathcal{F}_{ip}(L) \subseteq \mathcal{F}_i(L)$ şi $Max_i(L) \subseteq Spec_i(L)$.

Urmărind Teorema i-filtrului prim deducem un important corolar (vezi Corolarul 2.6) şi cu Principiul elementului minimal prezentăm o nouă teoremă care este bazată pe i-filtrul prim minimal (vezi Teorema 2.12).

Corolarul 2.6.

(i) Orice i-filtru propriu F al lui L poate fi extins la un i-filtru prim şi F este intersecţia acestor i-filtre prime care îl conţin pe F;

(ii) Dacă $I \in \mathcal{I}_d(L)$ şi $I \neq L$ atunci există un i-filtru prim P al lui L astfel încât $P \cap I = \varnothing$;

(iii) Dacă $F \in \mathcal{F}_i(L)$ şi $a \in L$ astfel încât $a \notin F$, atunci există un i-filtru prim P astfel încât $F \subseteq P$ şi $a \notin P$;

(iv) Dacă $a \in L, a \neq 1$, atunci există un i-filtru prim P of L astfel încât $a \notin P$;

(v) $\bigcap \{P : P \in Spec_i(L)\} = \{1\}$.

Teorema 2.12. Dacă $F \in \mathcal{F}_i(L)$ este propriu şi $S \subseteq L$ este o mulţime $\vee-$închisă astfel încât $F \cap S = \varnothing$, atunci există un i-filtru prim P aparţinând lui F cu proprietatea că $P \cap S = \varnothing$.

Pentru $P \in Spec_i(L)$ considerăm $\mathbf{1}(P) = \{x \in L : x \vee y = 1$ pentru unii $y \notin P\}$. Clar, $\mathbf{1}(P) \subseteq P$.

Lema 2.4. $\mathbf{1}(P) \in \mathcal{F}_i(L)$.

De asemenea, punem în evidenţă şi trei corolare (Corolarul 2.8, Corolarul 2.9 şi Corolarul 2.10) ale Propoziţiei 2.20, care este bazată pe i-filtrul prim minimal şi prezentată în [17].

Avem următoarele corolare ale Propoziţiei 2.20 :

Corolarul 2.8. Fie $F \in \mathcal{F}_i(L), n \in \mathbb{N}^*$ şi $P_0, P_1, ..., P_n$, $n+1$ i-filtre prime minimale distincâte ale lui F. Atunci există $a_0, a_1, ..., a_n \in L$ astfel încât $a_i \vee a_j \in F$ pentru toţi $i, j \in \overline{0, n}$ cu $i \neq j$ şi $a_i \notin P_i$ pentru toţi $i \in \overline{0, n}$.

Corolarul 2.9. Dacă $P \in Spec_i(L)$ este minimal, atunci pentru orice $x \in P$, există $y \notin P$ astfel încât $x \vee y = 1$.

Corolarul 2.10. Dacă $P \in Spec_i(L)$, atunci fiecare i-filtru prim minimal Q aparţinând lui $\mathbf{1}(P)$ este inclus în P.

Pentru $F \in \mathcal{F}_i(L)$ definim $\mathbf{0}(F) = \{x \in L : x^n \odot y = 0$ pentru unii $y \in F$ şi $n \geq 1\}$.

Lema 2.5. Dacă $F \in \mathcal{F}_i(L)$, atunci $\mathbf{0}(F) \in \mathcal{I}_d(L)$.

Propoziţia 2.22. Pentru $M \in \mathcal{F}_i(L), M \neq L$, următoarele afirmaţii sunt echivalente

(i) $M \in Max_i(L)$;

(ii) $L \setminus M = \mathbf{0}(M)$.

În finalul acestei secţiuni ne amintim câteva clase de filtre în latici reziduate pe care le folosim în clasificarea din capitolul 5.

Fie $F \in \mathcal{F}_i(L)$ şi $x, y, z \in L$. În ceea ce urmează, enumerăm anumite condiţii care vor fi utilizate în această teză (vezi [14], [15], [21], [46], [63], [86], [90], [112], [116], [125] $-$ [130]):

(F_4) pentru orice $x \in L$, $x \vee x^* \in F$;

(F_5) Dacă $x \to (z^* \to y), y \to z \in F$, atunci avem $x \to z \in F$;

(F_6) Dacă $x \to (y \to z), x \to y \in F$, atunci avem $x \to z \in F$;

(F_7) Dacă $(x \to y) \to x \in F$, atunci avem $x \in F$;

(F_8) pentru orice $x \in L$, $x \to x^2 \in F$;

(F_9) Dacă $x \to y \in F$, atunci avem $((y \to x) \to x) \to y \in F$;

(F_{10}) Dacă $z^{**} \to (x \to y), z^{**} \to x \in F$, atunci avem $z^{**} \to y \in F$;

(F_{11}) pentru orice $x \in L$, $x^{**} \to x \in F$;

(F_{12}) pentru orice $x, y \in L$, $(x \to y) \vee (y \to x) \in F$;

(F_{13}) pentru orice $x \in L$, $x \in F$ sau $x^* \in F$.

După cum urmează, ne amintim câteva nume pentru unele clase de filtre în laticea reziduată L.

Lema 2.15. $F \in \mathcal{F}_i(L)$ se numeşte:

(i) filtru *Boolean* dacă îndeplineşte condiţia (F_4) (vezi [21], [63], [80], [130]);

(ii) ds *implicativ* dacă îndeplineşte condiţia (F_5) (vezi [116]);

(iii) filtru *implicativ* dacă îndeplineşte condiţia (F_6) (vezi [21], [63], [80], [130]);

(iv) filtru *pozitiv implicativ* dacă îndeplineşte condiţia (F_7) (vezi [21], [46], [80], [130]);

(v) filtru *Heyting* dacă îndeplineşte condiţia (F_8) (vezi [21], [46], [80], [130]);

(vi) filtru *fantastic* dacă îndeplineşte condiţia (F_9) (vezi [14], [80]);

(vii) filtru *easy* dacă îndeplineşte condiţia (F_{10}) (vezi [21]);

($viii$) filtru *involutiv* (vezi [46], p. 3014) sau *filtru regulat* (vezi [130]) dacă îndeplineşte condiţia (F_{11});

(ix) filtru *MTL* dacă îndeplineşte condiţia (F_{12}) (vezi [129]);

(x) filtru *obstinate* dacă îndeplineşte condiţia (F_{13}) (vezi [14]).

2.6 Morfisme de latici reziduate şi produse directe de latici reziduate

În această secţiune reamintim noţiuni despre morfisme si produse directe de latici reziduate şi prezentăm exemple şi proprietăţi. O proprietate prezentată este aceea că produse directe de i-filtre din Definiţia 2.15 sunt filtre de acelaşi tip (vezi Remarca 2.25). Arătăm existenţa unui functor covariant B de la categoria laticilor reziduate la categoria algebrelor Boole şi că B conservă morfismele injective si produsele directe.

Remarca 2.25. 1.) Daă F_i este i-filtru Boole, atunci $F = \prod_{i \in I} F_i$ este Boole.
2.) Daă F_i este ds implicativ, atunci $F = \prod_{i \in I} F_i$ este implicativ.
3.) Daă F_i este i-filtru implicativ, atunci $F = \prod_{i \in I} F_i$ este filtru implicativ.
4.) Daă F_i este i-filtru pozitiv implicativ, atunci $F = \prod_{i \in I} F_i$ este filtru pozitiv implicativ.
5.) Daă F_i este i-filtru Heyting, atunci $F = \prod_{i \in I} F_i$ este filtru Heyting.
6.) Daă F_i este i-filtru fantastic, atunci $F = \prod_{i \in I} F_i$ este filtru fantastic.
7.) Daă F_i este i-filtru easy, atunci $F = \prod_{i \in I} F_i$ este filtru easy.
8.) Daă F_i este i-filtru involutiv, atunci $F = \prod_{i \in I} F_i$ este filtru involutiv.
9.) Daă F_i este i-filtru MTL, atunci $F = \prod_{i \in I} F_i$ este filtru MTL.
10.) Daă F_i este i-filtru obstinate, atunci $F = \prod_{i \in I} F_i$ este filtru obstinate.

Remarca 2.26. $A \to B(A)$ şi $f \to B(f)$ definesc un functor covariant $B : \mathcal{RL} \to \mathcal{B}$, de la categoria laticilor reziduate la categoria algebrelor Boole.

Propoziţia 2.25. B conservă morfismele injective.

Propoziţia 2.26. B conservă produsele directe.

Remarca 2.27. 1.) Daă F este un i-filtru al lui A, atunci $F \cap B(A)$ este un filtru al lui $B(A)$.
2.) Daă F este un i-filtru Boole al lui A, atunci $F \cap B(A)$ este un filtru Boole al lui $B(A)$.
3.) Daă F este un ds implicativ al lui A, atunci $F \cap B(A)$ este un filtru implicativ al lui $B(A)$.
4.) Daă F este un i-filtru implicativ al lui A, atunci $F \cap B(A)$ este un filtru implicativ al lui $B(A)$.
5.) Daă F este un i-filtru pozitiv implicativ al lui A, atunci $F \cap B(A)$ este un filtru pozitiv implicativ al lui $B(A)$.
6.) Daă F este un i-filtru Heyting al lui A, atunci $F \cap B(A)$ este un filtru Heyting al lui $B(A)$.
7.) Daă F este un i-filtru fantastic al lui A, atunci $F \cap B(A)$ este un filtru fantastic al lui $B(A)$.
8.) Daă F este un i-filtru easy al lui A, atunci $F \cap B(A)$ este un filtru easy al lui $B(A)$.

9.) Daă F este un i-filtru involutiv al lui A, atunci $F \cap B(A)$ este un filtru involutiv al lui $B(A)$.
10.) Daă F este un i-filtru MTL al lui A, atunci $F \cap B(A)$ este un filtru MTL al lui $B(A)$.
11.) Daă F este un i-filtru obstinate al lui A, atunci $F \cap B(A)$ este un filtru obstinate al lui $B(A)$.
12.) Daă G este un filtru al lui $B(A)$, atunci $\langle G \rangle$ este un i-filtru al lui A.

Capitolul 3

Noi caracterizări pentru elemente speciale în latici reziduate mărginite integrale

În acest capitol, lucrăm în cazul general al unei latici reziduate necomutative (mai precis, lucrăm cu *latici reziduate mărginite integrale*, sau FL_w- *algebre*) şi extindem pe cazul necomutativ anumite rezultate din [27].

3.1 Latici reziduate mărginite integrale

Această secţiune conţine definiţii de bază, exemple, mai multe reguli de calcul şi clase de latici reziduate mărginite integrale.

Folosind [36] (Teorema 4.4 şi Propoziţiile 2.1, 2.2) stabilim conexiuni între o latice reziduată mărginită integrală şi o pseudo MV-algebră.

Teorem 3.1. O latice reziduată mărginită integrală $(A, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$ este MV-algebră dacă şi numai dacă sunt îndeplinite următoarele două condiţii:

(W) $(x \rightarrow y) \rightsquigarrow y = (y \rightarrow x) \rightsquigarrow x$ şi $(x \rightsquigarrow y) \rightarrow y = (y \rightsquigarrow x) \rightarrow x$,

(H) $(x \rightarrow y) \odot x = (y \rightarrow x) \odot y = x \odot (x \rightsquigarrow y) = y \odot (y \rightsquigarrow x)$, pentru orice $x, y \in A$.

În următoarea propoziţie este o caracterizare a unui RL-monoid mărginit:

Proposition 3.3. Pentru o latice reziduată mărginită integrală A următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) A este un RL-monoid mărginit;

(ii) $x \rightsquigarrow (y \wedge z) = (x \rightsquigarrow y) \odot [(x \wedge y) \rightsquigarrow z]$ şi $x \rightarrow (y \wedge z) = [(x \wedge y) \rightarrow z] \odot (x \rightarrow y)$, pentru orice $x, y, z \in A$.

În următoarele două propoziţii stabilim o conexiune între o algebră Hilbert şi o pseudo MV-algebră, respectiv o latice Stone relativă.

Propoziţia 3.5. Pentru o latice reziduată mărginită integrală $(A, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$ următoarele sunt echivalente:

(i) $(A, \rightarrow, 1)$ este o algebră Hilbert sau $(A, \rightsquigarrow, 1)$ este o algebră Hilbert;

(ii) $(A, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$ este o G-algebră.

Propoziţia 3.6. Pentru o latice reziduată mărginită integrală $(A, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$ următoarele sunt echivalente:

(i) $(A, \rightarrow, 1)$ ($(A, \rightsquigarrow, 1)$) este o algebră Hilbert;

(ii) $(A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ ($(A, \vee, \wedge, \rightsquigarrow, 0, 1)$) este o latice Stone relativă.

În finalul acestei secţiuni prezentăm proprietăţi ale ale unei latici reziduate necomutative care îndeplineşte

(W) $(x \rightarrow y) \rightsquigarrow y = (y \rightarrow x) \rightsquigarrow x$ şi $(x \rightsquigarrow y) \rightarrow y = (y \rightsquigarrow x) \rightarrow x$.

Lema 3.1. Fie A o latice reziduată mărginită integrală care îndeplineşte (W). Atunci

(i) $x^{-\sim} = x^{\sim -} = x$ pentru orice $x \in A$;

(ii) $(x \rightarrow y) \rightsquigarrow y = (y \rightarrow x) \rightsquigarrow x = (x \rightsquigarrow y) \rightarrow y = (y \rightsquigarrow x) \rightarrow x = x \vee y$ pentru orice $x, y \in A$.

3.2 Centrul Boolean, elemente regulate, strong şi dense într-o latice reziduată mărginită integrală

În această secţiune o importantă construcţie pentru o latice reziduată mărginită integrală A este centrul Boolean $B(A)$, care conţine toate elementele complementate ale lui A. Amintim definiţiile şi propretăţile centrului Boolean şi elementelor booleene..

Pentru orice latice reziduată mărginită integrală A, notăm $Id(A) = \{x \in A : x \odot x = x\}$ mulţimea tuturor *elementelor idempotente* ale lui A şi prin $Inv(A) = \{x \in A : x = (x^{\sim})^{-} = (x^{-})^{\sim}\}$ mulţimea tuturor *elementelor involutive* ale lui A. $Inv(A)$ se numeşte *centrul involutiv* al lui A.

Dăm o nouă caracterizare pentru elementele involutive şi idempotente într-o latice reziduată mărginită integrală.

Propoziţia 3.9. Fie A o latice reziduată mărginită integrală şi $a, x \in A$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $x \in Inv(A)$;

(ii) $a \rightarrow x = x^{-} \rightsquigarrow a^{-}$ şi $a \rightsquigarrow x = x^{\sim} \rightarrow a^{\sim}$, pentru orice $a \in A$.

Lema 3.3. Fie A o latice reziduată mărginită integrală şi $x \in Id(A)$. Atunci $x \odot (x \rightsquigarrow y) = x \odot y$ şi $(x \to y) \odot x = y \odot x$, pentru orice $y \in A$.

Propoziţia 3.10. Dacă A este un RL- monoid şi $x \in Id(A)$, $y \in A$, atunci

(i) $x \odot y = x \wedge y = y \odot x$;

(ii) $x \wedge x^{\sim} = 0 = x \wedge x^{-}$;

(iii) $x \rightsquigarrow y = x \to y$;

(iv) $x^{\sim} = x^{-}$;

(v) $x \to x^{-} = x \to x^{\sim} = x \rightsquigarrow x^{-} = x \rightsquigarrow x^{\sim} = x^{-} = x^{\sim}$.

În această secţiune punem în evidenţă noi reguli de calcul cu elemente booleene într-o latice reziduată mărginită integrală A (vezi Lema 3.4).

Introducem definiţia elementelor regulate, strong şi dense într-o a latice reziduată mărginită integrală şi dăm noi caracterizări pentru aceste elemente.

Definiţia 3.3. Fie A o latice reziduată mărginită integrală. Spunem că un element $x \in A$ este *regulat* dacă pentru orice $y \in A$ avem $(x \to y) \rightsquigarrow x = (x \rightsquigarrow y) \to x = x$. Notăm prin $R(A)$ mulţimea tuturor elementelor regulate ale lui A. Spunem că un element $x \in A$ este *dens* dacă pentru orice $r \in R(A)$ avem $x \to r = x \rightsquigarrow r = r$. Notăm prin $D(A)$ mulţimea tuturor elementelor dense ale lui A.

Dăm o nouă caracterizare pentru elmentele regulate:

Teorema 3.2. Fie A o latice reziduată mărginită integrală. Pentru $x \in A$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $x \in R(A)$;

(ii) $x^{-} \rightsquigarrow x = x^{\sim} \to x = x$;

(iii) $x = x^{-\sim} = x^{\sim-}$ şi $x^{-} \odot (x^{-} \rightsquigarrow x) = (x^{\sim} \to x) \odot x^{\sim} = 0$.

Introducem definiţia elementelor strong deoarece împreună cu elementele regulate şi idempotente ne ajută să caracterizăm elemntele booleene.

Definiţia 3.4. Fie A o latice reziduată mărginită integrală. Folosind modelul [76], spunem că un element $x \in A$ este *strong* dacă $x^{-} = x^{\sim}$. Notăm prin $S(A)$ mulţimea tuturor elementelor strong ale lui A. Clar, dacă A este o latice reziduată mărginită integrală comutativă, atunci $S(A) = A$.

Dăm o nouă caracterizare pentru elementele booleene:

Teorema 3.3. Fie A o latice reziduată mărginită integrală. Pentru $x \in A$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $x \in B(A)$;

(ii) $x \in R(A) \cap Id(A) \cap S(A)$ şi $(x \rightsquigarrow x^-) \vee (x^- \rightsquigarrow x) = (x \to x^\sim) \vee (x^\sim \to x) = 1$.

Corolarul 3.2. Dacă A este o pseudo $MTL-$ algebră, atunci $B(A) = R(A) \cap Id(A) \cap S(A)$.

Din Teoremele 3.2 şi 3.3 deducem că:

Corolarul 3.3. Dacă A este o latice reziduată mărginită integrală, atunci $B(A) \subsetneqq R(A) \subsetneqq Inv(A)$.

Caracterizăm laticile reziduate mărginite integrale care sunt algebre Boole:

Teorema 3.4. Pentru o latice reziduată mărginită integrală A următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) A este o algebră Boole relativă la ordinea naturală;

(ii) A este o G - algebră şi $x^{-\sim} = x^{\sim -} = x$, pentru orice $x \in A$.

Dăm noi caracterizări pentru elemente dense şi prezentm̆ legăturile existente cu elementele booleeene, regulate şi strong.

Teorema 3.5. Fie A o latice reziduată mărginită integrală. Pentru $x \in A$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $x \in D(A)$;

(ii) $x^- = x^\sim = 0$;

(iii) $(a \odot x)^- = a^-$ şi $(x \odot a)^\sim = a^\sim$, pentru orice $a \in A$.

Remarca 3.18.

1. $D(A) \subseteq S(A)$;
2. Folosind Teorema 3.2, c_1' şi c_{25}' deducemt $D(A) \cap B(A) = D(A) \cap R(A) = D(A) \cap Inv(A) = \{1\}$;
3. Din Teorema 3.5, (iii), deducem că dacă $x \in D(A)$, atunci $(x^n)^- = (x^n)^\sim = 0$, deci, $x^n \in D(A)$, pentru orice $n \geq 1$.

Capitolul 4

Latici reziduate normale

În acest capitol, transferăm anumite rezultate de la o latice normală la cazul laticei i-normale definite în [17], [18].

4.1 Latici normale

Această secţiune conţine definiţii şi proprietăţi cunoscute despre laticile normale.

Definiţia 4.1. O latice mărginită distributivă L care verifică condiţia: pentru orice $x, y \in L$ cu $x \wedge y = 0$, există $z, t \in L$ astfel încât $x \wedge z = y \wedge t = 0$ şi $z \vee t = 1$, se numeşte *normală*.

L se numeşte *co-normală* dacă şi numai dacă este dual normală (asta înseamnă că, pentru toţi $x, y \in L$, dacă $x \vee y = 1$, există $z, t \in L$ astfel încât $z \wedge t = 0$ şi $z \vee x = t \vee y = 1$).

4.2 Latici reziduate i-normale

În această secţiune, transferăm definiţii şi anumite rezultate de la laticea normaă la cazul laticei i-normale şi facem o caracterizare a laticilor normale cu ajutorul laticei co-normale $\mathcal{F}_{ip}(L)$.

Definiţia 4.2. O latice reziduată L se numeşte *i-normală* dacă orice i-filtru prim P al lui L este conţinut într-un i-filtru maximal M_P.

Teorema 4.3. Pentru o latice reziduată L, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) L este i-normală;

(ii) Laticea $\mathcal{F}_{ip}(L)$ este co-normală;

(iii) Laticea $\mathcal{F}_i(L)$ este co-normală.

În [48], laticile reziduate i-normale sunt numite *latici reziduate cu proprietatea Gelfand* (sau *latici reziduate Gelfand*). Prprietăţile Gelfand au loc în laticile reziduatăte Stone, BL-algebre, dar nu au loc în orice latice reziduată.

Propoziţia 4.5. Consider L o latice reziduată Stone. Dacă L este o latice normală, atunci L este o latice reziduată i-normală.

În această secţiune, introducem noţiunea de i-filtru comaximal într-o latice reziduată şi noţiunea de anihilator al lui a relativ la b.

Două i-filtre P şi Q într-o latice reziduată L se numesc *comaximale* dacă $P \vee_i Q = L$.

Teorema 4.4. Pentru o latice reziduată L, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Orice i-filtru prim conţine un unic i-filtru prim minimal;

(ii) Orice două i-filtre minimale distincte sunt comaximale;

(iii) Oricare i-filtru maximal conţine un unic i-filtru minimal.

Dacă L este o latice reziduată şi $a, b \in L$, atunci considerăm mulţimea
$\langle a, b\rangle = \{x \in L : a^n \odot x \leq b$ pentru $n \geq 1\}$ (este numită anihilatorul lui a relativ la b ([91])).

Demonstrăm că anihilatorul lui a relativ la b intr-o latice reziduată este un ideal şi realizăm o caracterizare a laticilor reziduate i-normale.

Lema 4.1. Pentru orice $a, b \in L, \langle a, b\rangle \in \mathcal{I}_d(L)$.

Pentru $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_d(L)$, notăm prin $I_1 \vee_{id} I_2$ idealul lui L generat de $I_1 \cup I_2$.

Clar ([2]), $I_1 \vee_{id} I_2 = \{x \in L : x \leq a \vee b,$ cu $a \in I_1$ şi $b \in I_2\}$.

Teorema 4.5. Pentru o latice reziduată L, următoarele afirmaţii sunt echivalente

(i) L este i-normală;

(ii) Dacă $a, b \in L$ şi $a \odot b = 0$, atunci $\langle a, b\rangle \vee_{id} \langle b, a\rangle = L$;

(iii) Pentru orice $P \in Spec_i(L)$ şi $a, b \in L$ astfel încât $a \odot b = 0$, există $x \in P$ şi $p, q, r \geq 1$ astfel încât $a^p \odot x^q$ şi $b \odot x^r$ sunt comparabile.

Capitolul 5

O nouă abordare pentru clasificarea filtrelor în latici reziduate

Principalele rezultate ce stau la baza clasificării filtelor sunt prezentate pentru fiecare secţiune în parte:

5.1 Clase de filtre în latici reziduate

Definiţia 5.1 Un filtru $F \in \mathcal{F}_i(L)$ va fi numit $\mathcal{V}-$ *filtru* (sau *filtru de tipul* $\mathcal{V}$) dacă $L/F \in \mathcal{V}$.

5.2 Clasa $\mathcal{V} = \mathrm{B}$ (subvarietatea algebrelor Boole)

Teorema 5.1 Pentru $F \in \mathcal{F}_i(L)$, următoarele condiţii sunt echivalente:
(i) $F \in F(\mathbf{B})$;
(ii) F îndeplineşte condiţia (F_4);
(iii) F îndeplineşte condiţia (F_5);
(iv) F îndeplineşte condiţia (F_7).

5.3 Clasa $\mathcal{V} = \mathrm{BF}$ (filtrelor Boole într-o latice reziduată)

Propoziţia 5.2 Pentru un i-filtru F al lui L, următoarele condiţii sunt echivalente:
(i) F este filtru Boole;
(ii) pentru orice $x \in L$, $x \vee x^* \in F$;
(iii) Dacă $x^* \to x \in F$, atunci avem că $x \in F$.

5.4 Clasa $\mathcal{V} = \mathbf{H}$ (subvarietatea algebrelor Heyting sau $G-$ algebrelor)

Teorema 5.2 Pentru $F \in \mathcal{F}_i(L)$, următoarele condiţii sunt echivalente:
(i) $F \in F(\mathbf{H})$;
(ii) F îndeplineşte condiţia (F_6);
(iii) F îndeplineşte condiţia (F_8);
(iv) Dacă pentru orice $x, y, z \in L$, $x \to (y \to z) \in F$, atunci avem $(x \to y) \to (x \to z) \in F$;
(v) pentru orice $x, y \in L$, $(x \wedge (x \to y)) \to y \in F$;
(vi) pentru orice $x, y \in L$, $(x \wedge y) \to (x \odot y) \in F$;
(vii) L/F este o algebră Hilbert;
$(viii)$ L/F este o algebră Tarski.

5.5 Clasa $\mathcal{V} = \mathbf{MV}$ (subvarietatea $MV-$ algebrelor)

Teorema 5.3 Pentru $F \in \mathcal{F}_i(L)$, următoarele condiţii sunt echivalente:
(i) $F \in F(\mathbf{MV})$;
(ii) F îndeplineşte condiţia (F_9);
(iii) pentru orice $x, y \in L$, $((x \to y) \to y) \to ((y \to x) \to x) \in F$.

5.6 Clasa $\mathcal{V} = \mathbf{MTL}$ (subvarietatea $MTL-$ algebrelor)

Teorema 5.4 Pentru $F \in \mathcal{F}_i(L)$, următoarele condiţii sunt echivalente:
(i) $F \in F(\mathbf{MTL})$;
(ii) pentru orice $x, y \in L$, $(x \to y) \vee (y \to x) \in F$;
(iii) Dacă $x \to (y \vee z) \in F$, atunci avem că $(x \to y) \vee (x \to z) \in F$;
(iv) pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \to (y \vee z)) \to ((x \to y) \vee (x \to z)) \in F$;
(v) Dacă $(y \wedge z) \to x \in F$, atunci avem $(y \to x) \vee (z \to x) \in F$;
(vi) pentru orice $x, y, z \in L$, $((y \wedge z) \to x) \to ((y \to x) \vee (z \to x)) \in F$;
(vii) Dacă $x \to z \in F$, atunci avem că $(x \to y) \vee (y \to z) \in F$;
$(viii)$ pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \to z) \to ((x \to y) \vee (y \to z)) \in F$;
(ix) Dacă $(x \to y) \to z \in F$, atunci avem că $((y \to x) \to z) \to z \in F$;
(x) pentru orice $x, y, z \in L$, $((x \to y) \to z) \to (((y \to x) \to z) \to z) \in F$.

5.7 Clasa $\mathcal{V} = \mathbf{IRL}$ (subvarietatea laticilor reziduate involutive)

Teorema 5.5 Pentru $F \in \mathcal{F}_i(L)$, următoarele condiţii sunt echivalente:

(i) $F \in F(\mathbf{IRL})$;
(ii) Dacă pentru orice $x, y \in L$, $x^* \to y^* \in F$, atunci avem $y \to x \in F$;
(iii) Dacă pentru orice $x, y \in L$, $x^* \to y \in F$, atunci avem $y^* \to x \in F$.

5.8 Clasa $\mathcal{V} = **-$GA (subvarietatea $**-G-$ algebrelor)

Teorema 5.6 Pentru $F \in \mathcal{F}_i(L)$, următoarele condiţii sunt echivalente:
(i) $F \in F(**-\mathbf{GA})$;
(ii) Dacă pentru orice $x, y, z \in L$, $x^{**} \to (y \to z) \in F$, atunci $(x^{**} \to y) \to (x^{**} \to z) \in F$;
(iii) Dacă pentru orice $x, y \in L$, $x^{**} \to (x^{**} \to y) \in F$, atunci $x^{**} \to y \in F$;
(iv) pentru orice $x \in L$, $x^{**} \to (x^{**})^2 \in F$.

5.9 Clasa $\mathcal{V} =$ SgF (semi-G-filtrelor într-o latice reziduată)

Propoziţia 5.5 Pentru $F \in \mathcal{F}_i(L)$, următoarele condiţii sunt echivalente:
(i) F is a semi-G-filter;
(ii) pentru orice $x \in L$, $(x \wedge x^*)^* \in F$;
(iii) Dacă $x \to x^* \in F$, atunci avem că $x^* \in F$.

5.10 Clasa $\mathcal{V} =$ StF (filtrelor Stone într-o latice reziduată)

Teorema 5.7 Fie L o latice reziduată. Considerăm următoarele afirmatii:
(i) L este o latice reziduată Stone;
(ii) L este semi-G-algebră.
Atunci $(i) \Rightarrow (ii)$.
Dacă $L \in \mathbf{MTL}$, atunci $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

5.11 Clasa $\mathcal{V} = \mathbf{MTLF}, \mathbf{DivF}$ şi BLF (MTL - filtrelor, filtrelor divizibile şi BL - filtrelor într-o latice reziduată)

Propoziţia 5.9 Pentru un i-filtru F al laticei reziduate L, următoarele condiţii sunt echivalente:
(i) $F \in \mathbf{MTLF}(\mathbf{L})$;
(ii) Dacă $x \to (y \vee z) \in F$, atunci avem$(x \to y) \vee (x \to z) \in F$;

(iii) pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \to (y \vee z)) \to ((x \to y) \vee (x \to z)) \in F$;
(iv) Dacă $(y \wedge z) \to x \in F$, atunci avem $(y \to x) \vee (z \to x) \in F$;
(v) pentru orice $x, y, z \in L$, $((y \wedge z) \to x) \to ((y \to x) \vee (z \to x)) \in F$;
(vi) Dacă $x \to z \in F$, atunci avem $(x \to y) \vee (y \to z) \in F$;
(vii) pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \to z) \to ((x \to y) \vee (y \to z)) \in F$;
$(viii)$ Dacă $(x \to y) \to z \in F$, atunci avem $((y \to x) \to z) \to z \in F$;
(ix) pentru orice $x, y, z \in L$, $((x \to y) \to z) \to (((y \to x) \to z) \to z) \in F$.

Propoziţia 5.10 Pentru $F \in \mathcal{F}_i(L)$, următoarele condiţii sunt echivalente:
(i) $F \in \mathbf{DivF(L)}$;
(ii) pentru orice $x, y \in L$, $(x \wedge y) \to [x \odot (x \to y)] \in F$;
(iii) Dacă $z \to (x \wedge y) \in F$, atunci avem $z \to [x \odot (x \to y)] \in F$;
(iv) Dacă $(x \to y) \to (x \to z) \in F$, atunci avem că $(x \wedge y) \to z \in F$.

Propoziţia 5.12 Pentru un i-filtru F al laticei reziduate L, următoarele condiţii sunt echivalente:
(i) $F \in \mathbf{BLF(L)}$;
(ii) Dacă $(x \to y) \to (x \to z) \in F$, atunci avem că $(x \to z) \vee (y \to z) \in F$;
(iii) pentru orice $x, y, z \in L$, $((x \to y) \to (x \to z)) \to ((x \to z) \vee (y \to z)) \in F$.

5.12 Clasa $\mathcal{V}$ = MVF şi RF (MV- filtrelor şi filtrelor regulate într-o latice reziduată)

Lema 5.2 Dacă $F \in \mathbf{MVF(L)}$, atunci $x^{**} \to x \in F$, pentru orice $x \in L$.

Propoziţia 5.14 Pentru un i-filtru F al laticei reziduate L, următoarele condiţii sunt echivalente:
(i) $F \in \mathbf{RF(L)}$;
(ii) pentru orice $x \in L$, $x^{**} \to x \in F$;
(iii) pentru orice $x, y \in L$, $(y^* \to x^*) \to (x \to y) \in F$;
(iv) pentru orice $x, y \in L$, $(x^* \to y) \to (y^* \to x) \in F$.

5.13 Aplicaţii

În această secţiune vom prezenta câteva rezultate deosebite despre filtre în $\mathcal{RL}$.

Teorema 5.8 ([22]) Fie $\mathcal{V}$ o subvarietate a lui $\mathcal{RL}$ şi $F, G \in \mathcal{F}_i(L)$. Atunci
(i) Dacă $F, G \in F(\mathcal{V})$, atunci avem $F \cap G \in F(\mathcal{V})$;
(ii) Dacă $F \subseteq G$ and $F \in F(\mathcal{V})$, atunci avem $G \in F(\mathcal{V})$.

Concluzii şi lucrări viitoare

În această secţiune, aş dori să recomand o serie de noi direcţii importante de cercetare bazate pe rezultatele dezvoltate în această teză.

Problema 6.1 Găsiţi condiţii necesare şi suficiente pentru distributivitate în latici reziduate comutative, respectiv necomutative.

Propun următoarele
Problema 6.2 Găsiţi o altă caracterizare pentru elementele strong într-o latice reziduată mărginită integrală.

Problema 6.3 Găsiţi un alt studiu al laticilor reziduate normale pornind de la lucrările Normal Lattices ([37]) de William H. Cornish şi Characterizations of normal lattices ([105]) de Y. S. Pawar.

Propun următoarele
Problema 6.4 Găsiţi alte clase de latici reziduate care verifică $\mathbf{StF}(\mathbf{L}) = \mathbf{SgF}(\mathbf{L})$.

Bibliografie

[1] P. Bahls, J. Cole, P. Jipsen and C. Tsinakis, *Cancellative residuated lattices*, Algebra Universalis, Vol. 50, No. 1 (2003), 83-106.

[2] R. Balbes, Ph. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, 1974.

[3] G. Birkhoff, *Lattice theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, third edition, Providence, 1967.

[4] W. J. Blok, D. Pigozzi, *Algebraizable Logics*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 396, American Mathematical Society, Providence, 1989.

[5] K. Blount, C. Tsinakis, *The structure of residuated lattices*, International Journal of Algebra and Computation, No. 13 (2003), 437-461.

[6] T. S. Blyth, *Lattices and ordered algebraic structures*, Springer, Berlin, 2005.

[7] T. S. Blyth, M. F. Janovitz, *Residuation Theory*, Pergamon Press, 1972.

[8] V. Boicescu, *Contributions to the study of Lukasiewicz algebras (in Romanian)*, Ph.D. Thesis, University of Buckarest, 1984.

[9] V. Boicescu, A. Filipoiu, G. Georgescu, S. Rudeanu, *Lukasiewicz-Moisil algebras*, North-Holland, 1991.

[10] G. Boole, *On a general method in analysis*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 134, 1844, 225-282.

[11] G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic*, 1847.

[12] G. Boole, *The Calculus of Logic*, Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 3, 1848, 183-198.

[13] G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought*, 1854.

[14] A. Borumad Saeid, M. Pourkhatoun, *Obstinate filters in residuated lattices*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, Tome 55 (103), no. 4, (2012), 413-422.

[15] R. A. Borzooei, S. Khosravi Shoar, R. Ameri, *Some types of filters in MTL-algebras*, Fuzzy Sets and Systems, 187 (2012), 92-102.

[16] S. Buris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, No. 78, Sringer, 1981.

[17] C. Buşneag, *States and topologies on residuated lattices*, Ph.D. Thesis, University of Craiova, 2011.

[18] C. Buşneag, D. Piciu, *The stable topologies for residuated lattices*, Soft Comput. 16 (2012), 1639-1655.

[19] D. Buşneag, *A note on deductive systems of a Hilbert algebra*, Kobe J. Math., 2 (1985), 29-35.

[20] D. Buşneag, *Categories of Algebraic Logic*, Editura Academiei Române, Bucharest, 2006.

[21] D. Buşneag, D. Piciu, *Some types of filters in residuated lattices*, Soft Computing, vol. 18, Issue 5 (2014), 825-837.

[22] D. Buşneag, D. Piciu, *A new approach for classification of filters in residuated lattices*, Fuzzy Sets and Systems, 260 (2015), 121-130 .

[23] D. Buşneag, D. Piciu, *Semi-G-filters, Stonean filters, MTL-filters, divisible filters, BL-filters and regular filters in residuated lattices*, Iranian Journal of Fuzzy Systems, Vol. 13, Issue 1 (2016), 145-160.

[24] D. Buşneag, D. Piciu, *Residuated lattice of fractions relative to a $\wedge-$closed system*, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, Tome 49 (97), No. 1 (2006), 13-27.

[25] D. Buşneag, S. Rudeanu, *A glimpse of deductive systems in algebra*, Central European Journal of Mathematics, No. 8 (4) (2010), 688-705.

[26] D. Buşneag, D. Piciu, A. Jeflea, *Archimedean Residuated Lattices*, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University - Mathematics, DOI: 10.2478/v10157-010-0017-5, Vol. LVI, (2010), 227-252.

[27] D. Buşneag, D. Piciu and J. Paralescu, *Divisible and semi-divisible residuated lattices*, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University (S. N.) Matematica, Tomul LXI, f.2 (2015), 287-387.

[28] D. Buşneag, D. Piciu, L.-C. Holdon, *Some properties of ideals in Stonean residuated lattices*, Journal of Multiple Valued Logic & Soft Computing, vol. 24, Issue 5-6 (2015), 529-546.

[29] D. Buşneag, D. Piciu, **L.-M. Niţu**, *New characterizations for special elements in bounded integral residuated lattices*, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University - Mathematics, to appear.

[30] D. Buşneag, D. Piciu, **L.-M. Niţu**, *Normal residuated lattices*, Annals of the University of Bucharest - Mathematics, to appear.

[31] C. C. Chang, *Algebraic analysis of many-valued logic*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 88 (1958), 467-490.

[32] C. C. Chang, *A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 93 (1959), 74-80.

[33] L. Chun-hui, X. Luo-shan, *On $\odot$-Ideals and Lattices of $\odot$-Ideals in Regular Residuated Lattices,* in B.-Y. Cao et al. (Eds.): Quantitative Logic and Soft Computing 2010, AISC 82, 425-434.

[34] R. Cignoli, *Free algebras in varieties of Stonean residuated lattices*, Soft Computing, 12 (2008), 315-320.

[35] L.C. Ciungu, Some classes of pseudo-MTL algebras, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, Tome 50 (98), No. 3 (2007), 223-247.

[36] L. C. Ciungu, *Non-commutative multiple-valued logic algebras*, Springer, 2014.

[37] W. H. Cornish, *Normal lattices*, J. Austral. Math. Soc. 14 (1972), 200-215.

[38] O. Costinescu, *Elemente de topologie generală*, Ed. Tehnică, Bucureşti (1969).

[39] A. Diego, *Sur les algebrés de Hilbert*, Ed.Hermann, Collection de Logique Mathématique, Serie A, XXI, Paris (1966).

[40] A. Di Nola, G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Pseudo-BL algebras: Part I*, Multiple- Valued Logic, Vol. 8 (2002), 673-714.

[41] A. Di Nola, G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Pseudo-BL algebras: Part II*, Multiple- Valued Logic, Vol. 8 (2002), 717-750.

[42] A. Dvurečenskij, *Pseudo-MV algebras are intervals in l-groups*, Journal of Australian Mathematical Society, Vol. 70 (2002), 427-445.

[43] F. Esteva, L. Godo, *Monoidal $t-$norm based logic: towards a logic for left-continnuos $t-$norms*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 124, No. 3 (2001), 271-288.

[44] P. Flondor, G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Pseudo-t-norms and pseudo-BL algebras*, Soft Computing, Vol. 5, No. 5 (2001), 355-371.

[45] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, H. Ono: *Residuated lattices: an algebraic glimpse at substructural logics,* Elsevier, Amsterdam, 2007.

[46] B. Van. Gasse, G. Deschrijver, C. Cornelis, E. E. Kerre, *Filters of residuated lattices and triangle algebras*, Information Sciences, vol. 180, Issue 16 (2010), 3006-3020.

[47] G. Georgescu, *Algebra logicii - Logica algebrică*, Revista de logică, 2009.

[48] G. Georgescu, D. Cheptea, C. Mureşan, *Agebraic and topological results on lifting properties in residuated lattices*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 271 (15 july 2015), 102-132.

[49] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Pseudo-BL Algebras: A noncommutative extension of BL Algebras,* Abstracts of The Fifth International Conference FSTA, 2000, Slovakia, February 2000, 90-92.

[50] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Pseudo-MV algebras: a non-commutative extension of MV-algebras*, The proceedings of Fourth International Symposium of Economic Informatics, INFOREC Printing House, Bucharest, 1999, 961-968.

[51] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Pseudo-MV algebras: a non-commutative extension of MV algebras*, The proceedings of Fourth International Symposium of Economic Informatics, Bucharest, Romania, May 1999, 961-968.

[52] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Pseudo-MV algebras*, Multiple-Valued Logic, Vol. 6 (2001), 95-135.

[53] G. Georgescu, L. Leuştean, *Some classes of pseudo-BL algebras*, Journal of Australian Mathematical Society, Vol. 73 (1) (2002), 127-153.

[54] G. Georgescu, A. Popescu, Non-commutative fuzzy structures and pairs of weak negations, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 143 (2004), 129-155.

[55] G. Georgescu, A. Iorgulescu, S. Rudeanu, *Grigore C. Moisil (1906-1973) and his School in Algebraic Logic*, International Journal of Computers Communications & Control, Vol. 1 (2006), 81-99.

[56] G. Georgescu, A. Iorgulescu, S. Rudeanu, *Some Romanian reserches in the algebra of logic, In: Grigore C. Moisil and his followers in the field of theoretical computer science*, Romanian Academy Press, Bucharest, (2007), 86-120.

[57] V. Glivenko, *Sur quelque points de la logique de M. Browwer*, Bulletins de l'Academie Royale des Sciences de Belgique, Vol. 15 (1929), 183-188.

[58] G. Grätzer, *Universal algebra*, Springer, 2008.

[59] G. Grätzer, E. T. Schmidt, *On a problem of M. H. Stone*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica, Vol. 8, No. 3 (1957), 455-460.

[60] R.S. Grigolia, *Algebraic analysis of Lukasiewicz-Tarski logical system, R. Wojcicki, G. Malinkowski (eds)*, Selected Papers on Łukasiewicz Sentential Calculi, Osolineum, Wroclav, (1977), 81-92.

[61] P. Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Trends in Logic-Studia Logica Library 4, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[62] P. Hájek, *Basic fuzzy logic and BL-algebras*, Soft Computing, Vol. 2 (1998), 124-128.

[63] M. Haveshki, A. Borumand Saeid, E. Eslami, *Some type of filters in BL-algebras*, Soft Comput., vol. 10 (2006), 657-664.

[64] U. Höhle, *Commutative residuated monoids*, in: U. Höhle, P. Klement (eds), Non-classical Logics and Their Aplications to Fuzzy Subsets, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[65] L-C. Holdon, **L-M. Niţu**, G. Chiriac, *Distributive residuated lattices*, Annals of the University of Craiova - Mathematics and Computer Science Series, Vol. 39 (2012), 100-109.

[66] L-C. Holdon, *Some properties of filters in Stonean residuated lattices*, IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN), Vol. 04, issue 02 (2014), 44-60.

[67] L-C. Holdon, *Classes of residuated lattices*, Ph.D. Thesis, University of Craiova, 2014.

[68] P. M. Idziak, *Lattice operations in BCK-algebras*, Mathematica Japonica, 29 (1984), 839-846.

[69] A. Iorgulescu, *$(1+\theta)$-valued Łukasiewicz-Moisil algebras (in Romanian)*, Ph.D. Thesis, University of Bucharest, 1984.

[70] A. Iorgulescu, *Connections between MV_n-algebras and n-valued Łukasiewicz-Moisil algebras - I*, Discrete Mathematics, Vol. 181 (1998), 155-177.

[71] A. Iorgulescu, *Connections between MV_n-algebras and n-valued Łukasiewicz-Moisil algebras - II*, Discrete Mathematics, Vol. 202 (1999), 113-134.

[72] A. Iorgulescu, *Connections between MV_n-algebras and n-valued Łukasiewicz-Moisil algebras - III*, manuscript.

[73] A. Iorgulescu, *Connections between MV_n-algebras and n-valued Łukasiewicz-Moisil algebras - IV*, Journal of Universal Computer Sciences, Vol. 6 (1) (2000), 139-154.

[74] A. Iorgulescu, *Classes of pseudo-BCK algebras - Part I*, Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing, Vol. 12 (1-2) (2006), 71-130.

[75] A. Iorgulescu, *Classes of pseudo-BCK algebras - Part II*, Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing, Vol. 12 (5-6) (2006), 575-629.

[76] A. Iorgulescu, *Algebras of logic as BCK algebras*, Academy of Economic Studies Bucharest, 2008.

[77] S. Jenei, F. Montagna, *A proof of standard completeness for Esteva and Godos logic MTL*, Studia Logica 70 (2002), 183-192.

[78] P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge Univ. Press (1982).

[79] M. Kondo, *Simple characterization of strict residuated lattices with an involutive negation*, Soft Comput., vol. 17, issue 1 (2013), 39-44.

[80] M. Kondo, W. A. Dudek, *Filter theory of BL-algebras*, Soft Computing, 12 (2008), 419-423.

[81] T. Kowalski, H. Ono: *Residuated lattices: an algebraic glimpse at logic without contraction*, 2001.

[82] W. Krull, *Axiomatische Begründung der allgemeinen Ideal theorie*, Sitzungsberichte der physikalisch medizinischen Societäd der Erlangen, Vol. 56 (1924), 47-63.

[83] J. Kühr, *Representable idempotent commutative residuated lattices*, International Journal of Algebra and Computation, Vol. 18 (2008), 1365-1394.

[84] L. Leuştean, *Representation of many-valued algebras*, Ph.D. Thesis, University of Bucharest, 2003.

[85] L. Leuştean, G. Georgescu, C. Mureşan, *Maximal residuated lattices with lifting Boolean center*, Algebra Universalis, Vol. 63, No. 1 (2008), 83-99.

[86] L. Lianzhen, L. Kaitai, *Boolean filters and positive implicative filters of residuated lattices*, Inf. Sciences, 177 (2007), 5725-5738.

[87] J. Łukasiewicz, *On three-valued logic*, Ruch Filozoficzny(Polish), Vol. 5 (1920), 160-171.

[88] J. Łukasiewicz, A. Tarski, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et Lettres de Varsovie Cl.III, Vol. 23 (1930), 30-50.

[89] X. Ma, J. Zhan, W.A. Dudek, *Some kinds of $(\overline{\epsilon}, \overline{\epsilon} \vee \overline{q})$-fuzzy filters of BL-algebras*, Computers and Mathematics with Applications, 58 (2009), 248-256.

[90] X. L. Ma, J. M. Zhan, Y. Xu, *Generalized fuzzy filters of BL-lagebras*, Appl. Math. J Chin. Univ. Ser. B 22 (2007), 490-496.

[91] M. Mandelker, *Relative annihilators in lattices*, Duke Math. J., vol. 37, no.2 (1970), 377-386.

[92] R. Mc Kenzie, G. Mc Nulty, W. Taylor, *Algebras, Lattices, Varieties*, Wadsworth, Inc., Belmont, California 94002, 1987.

[93] N. Mohtashamnia, Arsham Borumand Saeid, *A special type of BL-algebra*, Annals of the University of Craiova - Mathematics and Computer Science Series, Vol. 39 (2012), 8-20.

[94] Gr. C. Moisil, *Recherches sur l'algèbre de la logique*, Ann. Sci. Univ. Jassy, 22, 1936, 1-118.

[95] Gr. C. Moisil, *Recherches sur les logiques non-chrysippiennes*, Annales Scientifiques de la Université de Jassy, Vol. 26 (1940), 431-466.

[96] Gr. C. Moisil, Notes sur les logiques non-chrysippiennes, Annales Scientifiques de la Université de Jassy, Vol. 27 (1941),86-98.

[97] Gr. C. Moisil, *Essais sur les logique non-chrysippiennes*, Editura Academiei R.S. România, Bucharest, 1972.

[98] S. Motamed, J. Moghaderi, *Noetherian and Artinian BL-algebras*, Soft Computing, Vol. 16, No. 11 (2012), 1989-1994.

[99] D. Mundici, *Interpretation of AF C^*-algebras in Łukasiewicz calculus*, Journal of Functional Analysis, Vol. 65 (1986), 15-63.

[100] C. Mureşan, *Co-Stone Residuated Lattices*, Annals of the University of Craiova - Mathematics and Computer Science Series, Vol. 40 (2013), 52-75.

[101] C. Mureşan, *The Reticulation of a Residuated Lattice*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, Tome 51(99), No. 1(2008), 47-65.

[102] M. Okada, K. Terui, *The finite model property for various fragments of intuitionistic linear logic*, Journal of Symbolic Logic, Vol. 64 (1999), 790-802.

[103] H. Ono, *Substructural logics and residuated lattices - an introduction*, 50 Years of Studia Logica, Trends in Logic, Kluwer Academic Publishers 21 (2003), 193-228.

[104] J. Pavelka, *On fuzzy logic II. Enriched residuated lattices and semantics of propositional calculus*, Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, Vol. 25 (1979), 119-134.

[105] Y. S. Pawar, *Characterizations of normal lattices*, Indian J. pure appl. Math. 24 (11) (1995), 651-656.

[106] D. W. Pei, *Fuzzy Logic Algebras on Residuated Lattices*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, Vol. 28 (2004), 519-531.

[107] D. W. Pei, *The characterization of residuated lattices and regular residuated lattices*, Acta Math. Sci. Ser. A 45 (2002), 271-278.

[108] D. Piciu, *Algebras of Fuzzy Logic*, Editura Universitaria Craiova, Craiova (2007).

[109] E. Post, *Introduction to a general theory of elementary propositions*, American Journal of Mathematics, Vol. 43 (1921) 163-185.

[110] J. Rachůnek, *A non-commutative generalization of MV-algebras*, Czechoslovak Journal of Mathematics, Vol. 52 (2002), 255-273.

[111] J. Rachůnek, D. Šalounová, *Classes of Filters in Generalizations of Commutative Fuzzy Structures,* Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica 48 (2009), 93-107.

[112] J. G. Shen, X. H. Zhang, *Filters of residuated lattices*, Chin. Quart. J. Math. 21 (2006), 443-447.

[113] M. H. Stone, *Topological representations of distributive lattices and Browerian logics*, Casopispest. Math. 67 (1937), 1-25.

[114] E. Turunen, *Mathematics Behind Fuzzy logic*, Physica-Verlag, New York 1999.

[115] E. Turunen, *Local BL-algebras*, Multiple-Valued Logic, Vol. 6, No. 1-2 (2001), 229-249.

[116] E. Turunen, *Boolen deductive systems of BL-algebras*, Arch. Math. Logic 40, (2001), 467-473.

[117] E. Turunen, J. Mertanen, *States on semi-divisible residuated lattices*, Soft Computing, Vol. 12 (2008), 353-357.

[118] J. Varlet, *On the characterization of Stone lattices*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), Vol. 27 (1966), 81-84.

[119] M. Vita, *Why are papers about filters on residuated structures (usually) trivial?*, Information Sciences (2014), doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2014.01.013

[120] M. Vita , P. Cintula, *Filters in algebras of fuzzy logics*, EUSFLAT-LFA (2011), 169-174.

[121] H. Wallman, *Lattices and topological spaces*, Ann. math. (2) 39 (1938), 112-126.

[122] M. Ward, *Residuated distributive lattices*, Duke Mathematical Journal, Vol. 6, No. 3 (1940), 641-651.

[123] M. Ward, R. P. Dilworth, *Residuated lattices*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 45 (1939), 335-354.

[124] A. N. Whitehead, *A Treatise on Universal Algebra, with Applications*, Cambridge Univ. Press, 1898.

[125] O. Zahiri, H. Farahani, *n-Fold filters of MTL-algebras*, Afr. Math., DOI 10.1007/s13370-013-0184-0.

[126] J. M. Zhan, Y. Xu, *Some type of generalized fuzzy filters of BL-algebras*, Comput. Math. Appl. 56 (2008), 1604-1016.

[127] X. H. Zhang, Y. B. Jun, M. I. Doh, *On fuzzy filters and fuzzy ideals of BL-algebras*, Fuzzy Syst. Math. 3 (2006), 8-20.

[128] X. H. Zhang, *On filters in MTL-algebras*, Adv. Syst. Sci. Appl. 7 (2007), 32-38.

[129] M. A. Zhenming, *MTL-filters and their characterizations in residuated lattices*, Computer Engineering and Applications, 48 (20), (2012), 64-66.

[130] Y. Zhu, Y. Xu, *On filter theory of residuated lattices*, Information Science, Vol. 180 (2010), 3614-3632.